بسمه تعالی

جزوه صفر تا صد آمار و احتمال

ویژه آزمون های استخدامی

آبان 98

به نام خدا

مبحث آمار و احتمال به عنوان یکی از موضوعات و سرفصل های طرح سوال در آزمون های استخدامی مطرح گردیده است ؛ لذا اینجانب تمام سعی خود را کرده ام که جزوه حاضر بتواند با بیان شیوا و ساده مطالب به زبان عامیانه ضمن پوشش کامل مباحث و سرفصل ها به همراه نکات منسجم و تست های مطرح شده در آزمون های گذشته امکان موفقیت شما را تا حد قابل اطمینانی فراهم نمایم .اکنون یادآوری نکاتی چند به حضورتان را موثر می دانم

1-از مطالعه گسسته فصل ها حتی المقدور پرهیز شود

2-در تهیه مطالب این جزوه سعی شده از منابع معتبر استفاده شود ؛ اکثرا مطالب در برگرفته از جزوهای دبیرستان صنعتی شریف (مجموعه الا) است

3-اگه این جزوه مورد استقبال شما قرار گرفت ، سایر جزوه ها (هوش و استعداد تحصیلی، ریاضی، زبان انگلیسی) را پس از مرتب کردن در دسترس شما قرار خواهم داد

صفحه	عنوان

* مجموعه ها :

✓ تعریف مجموعه: یک بسته ای از اشیاء یا اعداد که دو به دو غیر یکسان باشند
یعنی تو مجموعه عضو تکراری نخواهیم داشت و اگر وجود داشت باشه شمرده نمی شود)
و آن را با آکلاد نشان می دادن مثال $A=\{a,b,4\}$ ← این مجموعه ۳ عضو دارد

✓ مجموعه تهی: مجموعه ای که داخل آن هیچ چیزی نباشد (خالی باشد) و چند مدل آن
را نشان می دهیم $\emptyset$ ، ϕ ، $\{\ \}$ ← داخل این باید خالی باشد اگر چیزی باشد
تهی نیست مثال $\{\phi\}$ ← این تهی نیست

✓ مجموعه مرجع: بهش میگن مجموعه مادر، مجموعه ای که همه مجموعه ها را شامل
میشه با M نشونش می دیم تو مفهوم ازش استفاده می کنیم

✓ عضویت: با $\in$ نشونش می دن این مجموعه را در نظر بگیرید $A=\{a,2,b\}$
$\boxed{2\in A}$ ← فارسی این میشه ۲ عضو A

✓ زیرمجموعه: $(\subset)$ مجموعه B را زیرمجموعه A می گوییم هرگاه هر عضو B عضو
مجموعه A نیز باشد و به صورت زیر نمایش می دهیم

نکته: اگر A دارای n عضو باشد، تعداد زیرمجموعه های آن برابر 2^n است
مثال: مجموعه $A=\{a,2,b\}$ چند تا زیرمجموعه دارد؟ $8=2^3=2^n=$ تعداد زیرمجموعه
شاید واستون جای سوال باشه که مجموعه A سه عضو دارد چطوری ۸ زیرمجموعه دارد!!

$\{a\}\subset A$ ، $\{2\}\subset A$ ، $\{b\}\subset A$ ← سه تک عضوی داریم

$\{a,2\}\subset A$ ، $\{a,b\}\subset A$ ، $\{b,2\}\subset A$ ← ۳ تا هم دو عضوی داریم

$\{\ \}\subset A$ تهی زیرمجموعه هر مجموعه ای است

$\{a,b,c\} \subset A$ ← هر مجموعه‌ای زیر مجموعه خودش است

پس تعداد کل زیر مجموعه‌ها؟ خود مجموعه + تهی + ۳ تا دو عضوی + ۳ تا تک عضوی

* نکته: اگر تعداد زیر مجموعه‌های مثلاً سه عضوی یا دو عضوی و ... را خواستن

می‌تونید از این رابطه استفاده کنید $C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n}{r}$

n تعداد کل عضو‌ها، r اگر تعداد زیر مجموعه‌های مثلاً سه عضوی را خواستن ۳ میشه

۳ اگر چهار عضوی را خواستن میشه ۴ و ...

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ باشد، تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی و ۵ عضوی را حساب کنید

$n=6 \quad , \quad r=3 \qquad C(n,r)=\binom{n}{r}$

حل: تعداد سه عضوی‌ها ← $C(6,3)=\binom{6}{3}=\frac{4\times5\times6}{1\times2\times3}=20$

برای محاسبه $\binom{n}{r}$ که اینجا $\binom{6}{3}$ است یه خط کسری می‌کشیم n را تو صورت می‌نویسیم (۶) و r را تو مخرج (۳)، تو مخرج میایم عقب تا به یک برسیم ($1\times2\times3$) بعد تو صورت به اندازه مخرج میایم عقب تو مخرج دو واحد اومدیم عقب ← تو صورت دو واحد میایم ($4\times5\times6$)

* تعداد پنج عضوی‌ها $\quad n=6 \quad , \quad r=5$

$C(6,5)=\binom{6}{5}=\frac{6}{1}=6$

$\underbrace{6-5}_{n-r}$

چرا از روش قبل نرفتیم

چون محاسبات کمی بیشتر می‌شد مثلاً ($1\times2\times3\times4\times5$).

پس وقتی محاسبات کم باشه از روش اول وقتی زیاد باید روش دوم

$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n}{n-r}$

* اجتماع ($\cup$) ← اجتماع یعنی به کاسه کردن (دور هم جمع کردن) .

* اشتراک ($\cap$) ← $A \cap B$ ← عدد یا اعدادی که بین A و B مشترک .

* تفاضل (-) ← $A - B$ ← اعدادی که در A است ولی در B نیست .

مثال: اگر $A = \{1, 2, 5\}$ و $B = \{3, 5, 7, 9\}$ مطلوب است ؟

الف) $A \cup B$ ← $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

مجموعه‌ها باید فاقد عضو تکراری باشد که ما اینجا دو تا ۵ داشتیم یکیشو نوشتیم

ب) $A \cap B$ ← $A \cap B = \{5\}$

ج) $A - B$ ← $A - B = \{1, 2\}$

* نکته ۱: $A - B = A \cap B'$ ← یعنی در $A - B$، خود A را می‌نویسیم بعد - تبدیل به اشتراک میشه و B تبدیل میشه به B' .

فارسی $A \cap B'$ ← آ اشتراک بی پریم (بی‌ اول)

* نکته ۲: $B' = M - B$ ، $A' = M - A$

مثال: اگر $A = \{1, 2, 5\}$ و $B = \{3, 5, 7, 9\}$ ، A' و B' کدامند ؟

$M = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

$A' = M - A = \{3, 5, 7, 9\}$ ، $B' = M - B = \{1, 2\}$

اعداد حسابی $W = I = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ، $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ اعداد طبیعی

صحیح $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

این مجموعه‌ها نامتناهی هستند، چون نمی‌دانیم انتهای آنها چیه قابل شمارش نیستند.

$W - N = \{0\}$ ← متناهی

دستان۲۲

A- اگر $A=\{2,3,6,7,8\}$ و $B=\{2,4,5,6\}$ آنگاه $(A\cup B)-[A-(A\cap B)]$ چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$A\cap B=\{2,6\}$ ، $A-(A\cap B)=\{3,7,8\}$ ، $A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8\}$

$\Rightarrow (A\cup B)-[A-(A\cap B)]=\{2,4,5,6\}\Rightarrow n=4$

B- اگر $A=\{1,2,1,\{1,2\},\{2,1\},\{\}\}$ آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های A چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

تعداد عضوها: ۱، ۲، $\{1,2\}$

$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها}=2^n=2^3=8$

تکرار در مجموعه‌ها مجاز نیست ← ما از $\{1,2\}$ یکی را حساب می‌کنیم پس تعداد عضوها شد عدد ۱ و عدد ۲ و مجموعه $\{1,2\}$ ⇐ $n=3$

C- A: اعداد طبیعی فرد است ، B اعداد اول کدام مجموعه متناهی و غیرتهی است؟

۱) $A-B$ ۲) $B-A$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A-(A\cup B)$

نکته: اعداد اول اعدادی هستند که بر یک و خودشان بخش‌پذیر باشند ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ...

اعداد طبیعی فرد: ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ...

$\Rightarrow B-A=\{2\}$

چه اعدادی در A هست که در B نیست؟ A اعداد طبیعی فرد است و B هم شامل اعداد فرد میشه ← میشه گفت کلیه اعداد اول بجز ۲ جزو اعداد طبیعی فرد محسوب میشن.

* متناهی باشه یعنی قابلیت شمارش داشته باشه

۱- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، $(B'-A)'$ با کدام مجموعه برابر است؟ (تأمین اجتماعی)

۱) $B'\cap A'$ ۲) $B\cap A'$ ۳) $B\cup A$ ۴) $B\cup A'$

گزینه ۲ $(B'-A)' = (B')'\cap A' = B\cap A'$

۲- اگر A و B به ترتیب مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد صحیح باشند، مجموعه $A\Delta B$ کدام است؟ (دیوان محاسبات)

۱) $\{-1, -2, \dots\}$ ۲) $\{0, -1, -2, \dots\}$ ۳) $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ۴) $\{1, 2, 3, \dots\}$

گزینه ۲ $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(-\infty, 0)$

$N=A=\{1, 2, 3, \dots\}$ ، $W=B=\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

۳- اگر مجموعه‌های A ، B و C طوری باشند که $A\in B-C$ ، در این صورت مجموعه $C-A$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر، به طور قطع برابر است؟ (دیوان محاسبات)

۱) $C\Delta A$ ۲) $B-A$ ۳) $C\cap A$ ۴) C

گزینه ۴ ~~فرض می‌کنیم~~ $B=\{1, 2, 3, 4\}$ و $C=\{5, 6, 7\}$

$B-C=\{1, 2, 3\}=A \Rightarrow C-A=\{5, 6, 7\}=C$

۴- اگر A و B دو مجموعه ناتهی باشند، مجموعه $A-(A\cap B)$ کدام است؟ (آموزش و پرورش)

۱) $A\cap B$ ۲) $A\cap B'$ ۳) $B\cap A'$ ۴) $(A\cup B)'$

حل: $A-A\cap B = A\cap(A-B)' \rightarrow A\cap(A'\cup B')=(A\cap A')\cup(A\cap B')=A\cap B'$

$A - B = A\cap B'$

بر اساس این قانون حل می‌کنیم $A-B=A\cap B'$ ، A را A فرض می‌کنیم ، $A\cap B$ را B فرض می‌کنیم

۵- اگر به مجموعه A چهار عضو اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن چند برابر می‌شود؟

[آزمون تیزهوشان] ۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

تعداد زیرمجموعه‌ها $= 2^n \quad 2^{n+4} = 2^n \times 2^4 = 16 \times 2^n \Rightarrow$ ۱۶ برابر می‌شود

۶- اگر A و B دو مجموعه ناتهی بوده و $(B-A)\cup A = A$ کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟ ۱) $B\subset(B-A)$ ۲) $A-B=\phi$ ۳) $B-A=\phi$ ۴) $B-A=B$

$A\neq\phi$ و $B\neq\phi$ ، $(B-A)\cup A = (B\cap A')\cup A = A \Rightarrow$

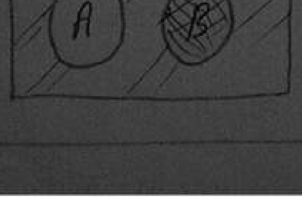
$(A\cup B)\cap(A\cup A') = A \Rightarrow (A\cup B)\cap M = A \Rightarrow A\cup B = A$

$\Rightarrow B\subset A \Rightarrow B-A=\phi$

۷- اگر دو مجموعه A و B غیرتهی و $A-B=A$ آنگاه $B\cap A'$ کدام مجموعه است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cup B$ ۴) $A\cap B$

اگر $A-B=A$ باشد یعنی دو مجموعه جدا از هم هستند ($A\cap B=\phi$)، فضای هاشورخورده نمایانگر مجموعه A' و B می‌باشد پس: $B\cap A'=B$



* تعاریف و مفاهیم

۱- جامعه آماری (جمعیت): مجموعه بزرگی از افراد یا اشیاء که برای به دست آوردن اطلاعات خاص، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال ← جامعه دانشجویان رشته آمار یا مجموعه دانشجویان رشته ریاضی در مقطع کارشناسی یا وزن تمامی نوزادانی که از این لحظه به بعد در بیمارستان های ایران متولد می‌شوند و ... اینها همگی معرف یک جامعه آماری می‌باشند

۲- اندازه جامعه: تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه می‌گوییم.

۳- تعریف سرشماری: اگر تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم می‌گوییم سرشماری کرده‌ایم

۴- نمونه: زیرمجموعه‌ای از جامعه آماری است که بیان کننده‌ی ویژگی‌های اصلی جامعه باشد. ✓- عمل نمونه‌گیری مهم‌ترین بخش آمار است

✓- برای آنکه نمونه بتواند به درستی نمایانگر خصوصیات تمام جامعه باشد، باید به اندازه کافی بزرگ باشد

✓- اعضای نمونه باید تصادفی انتخاب شوند، یعنی انتخاب آن‌ها باید از قانون خاصی پیروی کند به طوری که همه اعضای جامعه شانس انتخاب شدن را داشته باشند.

۵- اندازه نمونه: تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می‌گوییم.

۶- انواع نمونه:
- ساده: نمونه‌ای است که شخص آمارگر در انتخاب آن میل و سلیقه خود را اعمال کرده است.
- تصادفی: نمونه‌ای است که میل و سلیقه شخص آمارگر در انتخاب آن دخالت ندارد.

۷- مشاهده‌ی آماری: عبارت است از جمع آوری اطلاعات مربوط به صفات متغیر در یک جامعه آماری

۸- به کمیت یا کیفیتی که متعلق به عناصر جامعه آماری است **صفت** گفته می‌شود؛ در حقیقت صفت ویژگی عناصر یک جامعه آماری را بیان می‌کند

۱-۷ انواع صفت:

- صفت ثابت (صفت مشخصه) ← صفتی که بین همه عناصر یک جامعه آماری مشترک است
- صفت متغیر (صفت آماری) ← صفتی است که از فردی به فرد دیگر در بین عناصر جامعه آماری می‌تواند تغییر کند و به اختصار به آن متغیر می‌گوییم

۹- تعریف داده: نتایج حاصل از اندازه گیری و یا بررسی صفت را داده می‌گوییم

۱۰- روش های جمع آوری داده ها:

- از طریق پرسش
- از طریق مشاهده و ثبت وقایع
- از طریق انجام آزمایش
- استفاده از داده‌های از پیش تهیه شده

متغیرها

کمی

متغیرها هستند که قابل اندازه‌گیری باشند یعنی می‌توانیم به آن‌ها عدد نسبت دهیم) مانند قد، وزن، درجه حرارت، شدت زلزله

پیوسته

متغیری که مقدار آن از راه اندازه‌گیری به دست آید. (غیر قابل شمارش - اعشار پذیر) مانند
طول
وزن
قد
طول یا ارتفاع پرنده
زمان
مساحت

گسسته

متغیری که مقدار آن از راه شمارش تعیین گردد (قابل شمارش) تعداد دانش‌آموزان یک کلاس اتومبیل‌ها تعداد

کیفی

متغیرهای هستند که قابل اندازه‌گیری نباشند یعنی نمی‌توانیم به آن‌ها عدد نسبت دهیم) مانند: گروه خونی، جنسیت افراد، کیفیت که کالا تولید شده.

ترتیبی

متغیرها هستند که در آن‌ها نوعی ترتیب طبیعی وجود دارد مانند حروف الفبای فارسی ترتیب دارند و به ترتیب به صورت الف، ب، پ ... می‌باشند یا مراحل تحصیل که در آن دبستان قبل از راهنمایی و راهنمایی قبل از دبیرستان و ... می‌باشد.

اسمی

متغیر کیفی‌ای که ترتیبی نباشد، متغیر کیفی اسمی می‌باشد مانند رنگ چشم افراد، گروه خونی، ورزش مورد علاقه، وضعیت سواد، وضعیت مسکن

۱- کدام متغیر، کیفی ترتیبی است؟ (آموزش و پرورش)

۱) رنگ ها ۲) دوران تحصیل ۳) گروه خونی ۴) شدت زلزله

۲- برای بررسی رنگ خودروهای ساخته شده توسط یک شرکت خودروساز، از چه نوع متغیری استفاده می شود؟ (دستگاه های اجرایی - فراگیر)

۱) کیفی - ترتیبی ۲) کمی - ترتیبی ۳) کیفی - اسمی ۴) کمی گسسته

۳- اگر نمره کسب شده معلمان در یک دوره ضمن خدمت براساس نمره ی صفر تا ۴ تنها به صورت عددهای ... باشد، نوع متغیر تصادفی نمرات کدام است؟ (آموزش و پرورش)

۱) کمی پیوسته ۲) کمی گسسته ۳) کیفی اسمی ۴) کیفی ترتیبی

۵- جمع آوری داده ها به کدام طریق مورد قبول نیست؟

۱) مصاحبه ۲) مشاهده ۳) انجام آزمایش ۴) پرسش هدایت کننده

۶- گروه خونی افراد، کدام نوع متغیر است؟

۱) کیفی - اسمی ۲) کیفی - ترتیبی ۳) کمی - پیوسته ۴) کمی - گسسته

۷- رنگ چشم علی قهوه ای است. متغیرهای تصادفی X و Y، رنگ چشم و طول قد هر دو نفری است که به تصادف در سمت چپ او راست علی قرار می گیرند، نوع متغیرهای تصادفی X و Y، به ترتیب کدامند؟ (دستگاه های اجرایی - فراگیر)

الف) کیفی اسمی - کمی پیوسته ب) کیفی ترتیبی - کمی پیوسته

ج) کیفی اسمی - کمی گسسته د) کیفی ترتیبی - کمی گسسته

* دسته بندی داده ها

۱- دامنه تغییرات:

فاصله بین کم‌ترین و بیشترین داده است:

$$R = x_{max} - x_{min}$$

دامنه، بزرگترین داده، کوچکترین داده

✓ هرچه دامنه تغییرات بزرگتر باشد یعنی اختلاف در جامعه بیشتر است.

✓ اگر همه داده ها با عدد k جمع یا تفریق شوند، R تغییر نمی کند

✓ اگر همه داده ها را در یک عدد ضرب یا بر آن تقسیم کنیم R نیز در آن عدد ضرب یا بر آن عدد تقسیم می شود

✓ اگر همه داده ها با هم برابر باشند دامنه تغییرات برابر صفر می شود و برعکس

1 ۲- طول دسته: (c)

$$\text{طول دسته} = \frac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{تعداد دسته ها}} \Rightarrow c = \frac{R}{K} \quad \text{یا} \quad c = b_i - a_i$$

کران پایین دسته، کران بالای دسته

۳- مرکز دسته: (x_i)

$$\text{مرکز دسته} = \frac{\text{حد پایین} + \text{حد بالا}}{2}$$

کران پایین، کران بالا

نقطه نمونه
شاخص
مقدار مشترک
مقدار ویژه
ارزش مشترک

۴- فراوانی مطلق: (f_i)

تعداد داده ها در هر دسته، فراوانی مطلق آن دسته نام f_i دارد.

۵- فراوانی نسبی: ($\bar{f}_i$)

$$\text{فراوانی نسبی} = \frac{\text{فراوانی هر دسته}}{\text{کل فراوانی ها}} \Rightarrow \bar{f}_i = \frac{f_i}{\sum f_i}$$

۶- درصد فراوانی نسبی: (P_i)

$$\text{درصد فراوانی نسبی} = \text{فراوانی نسبی} \times 100 \Rightarrow P_i = \bar{f}_i \times 100$$

✓ در هر جدول فراوانی، مجموع فراوانی های نسبی برابر یک و مجموع درصد فراوانی نسبی برابر ۱۰۰ است

۷- فراوانی تجمعی: (Fc_i)

✓ مجموع فراوانی های هر دسته و دسته های قبل از آن را فراوانی تجمعی می گوییم.

به عنوان مثال: $Fc_3 = F_3 + F_2 + F_1$

۸- فراوانی تجمعی نسبی: ($\overline{Fc_i}$)

فراوانی تجمعی نسبی = فراوانی تجمعی هر دسته / کل فراوانی ها $\Rightarrow \overline{Fc_i} = \dfrac{Fc_i}{\sum F_i}$

✓ در هر جدول فراوانی، فراوانی تجمعی طبقه اول با فراوانی مطلق طبقه اول برابر است: $Fc_1 = F_1$

✓ در هر جدول فراوانی، فراوانی تجمعی طبقه آخر با تعداد کل داده ها یا فراوانی کل برابر است: $Fc_n = \sum F_i$

✓ در هر جدول فراوانی تجمعی برای محاسبه فراوانی مطلق هر دسته، فراوانی تجمعی همان دسته را از فراوانی دسته قبل کم می کنیم.

---

* جدول توزیع فراوانی و جدول طبقه بندی

۱- جدول توزیع فراوانی

توزیع ↓ بخش کردن — فراوانی ↓ تعداد

مثال ۱ ←

x_i نمره آمار	۱۲	۱۴	۱۶	۲۰
f_i فراوانی (تعداد)	۲	۴	۳	۲

x_i ← در علم آمار یعنی داده ها، یعنی اطلاعاتی که در اثر آمارگیری بدست آمده

که در جدول فوق نمرات دانش آموزان در درس آمار است

f_i ← فراوانی، فراوانی به لحاظ مفهوم یعنی تعداد

مفهوم جدول

کمترین نمره کلاس ۱۲، بیشترین نمره کلاس ۲۰،

۲ دانش آموز نمره ۲۰ گرفتن و [redacted] ۳ دانش آموز نمره ۱۶ گرفتن و ...

$R = x_{max} - x_{min} = ۲۰ - ۱۲ = ۸$ دامنه تغییرات

مفهوم آن ← فاصله ضعیف ترین شاگرد کلاس تا قوی ترین شاگرد کلاس در حد ۸ نمره است.

اگر تعداد داده های آماری کم باشد برای دسته بندی آن ها یک جدول توزیع فراوانی

رسم می کنیم که در ستون اول مقادیری از متغیر (x_i) را می نویسیم و در ستون

دوم فراوانی مربوط به هر ستون (f_i) را می نویسیم

۲- جدول طبقه بندی یا جدول دسته بندی

اگر تعداد داده های آماری زیاد باشد باید داده ها را دسته بندی کنیم و برای

طبقات حدود قائل شویم.

مثال ۲:

حد پایین (کران پایین) — حد بالا (کران بالا)

حدود طبقات (درصد نمرات)	۴۰-۵۰	۵۰-۶۰	۶۰-۷۰
f_i فراوانی	۷	۸	۳

معنی جدول

✓- سه دانش آموز درصدهای که بدست آوردن بین هفتاد تا شصت درصد است

✓- تعداد طبقات: (k) در جدول فوق؟ ۳

۴۰ - ۵۰

۵۰ - ۶۰

۶۰ - ۷۰

✓ طول طبقات: (c) در جدول فوق؟ ۱۰ ‏ ۱۰=۶۰-۷۰ ، ۱۰=۵۰-۶۰ ، ۱۰=۴۰-۵۰

طول طبقات توی تست ها همیشه ثابت است

✓ دامنه تغییرات (R) در جدول فوق؟

بیشترین درصد — کمترین درصد

$R = max - min = ۷۰ - ۴۰ = ۳۰$

✓ مرکز دسته: (x_i) اول در جدول فوق؟ ۴۵ = $\frac{۴۰+۵۰}{۲}$ = $\frac{\text{حد پایین + حد بالا}}{۲}$ = مرکز دسته اول

✓ تعداد کل دانش آموزان؟ ۱۸ = ۳ + ۸ + ۷ ← تعداد کل برابر است

با مجموع فراوانی $n = \sum f_i$

✓: حد بالای دسته اول = حد پایین دسته دوم

* شاخص های هندسی، نمودارهای هندسی:

۱- نمودار میله ای: مناسب برای داده های گسسته و کیفی.

✓- مرکز دسته ها را بر روی محور xها و فراوانی هر دسته را بر روی محور yها نمایش می دهیم.

✓- طول هر میله متناسب با فراوانی هر دسته است.

✓- فاصله ی هر دو میله ی متوالی برابر طول دسته است.

۲- نمودار مستطیلی: مناسب برای داده های کمی پیوسته.

✓- حدود دسته ها را بر محور xها و فراوانی هر دسته را بر روی محور yها نشان می دهیم.

✓- بلندی هر مستطیل متناسب با فراوانی هر دسته است.

✓- $\dfrac{\text{مساحت مستطیل مربوط به آن دسته}}{\text{مساحت کل مستطیل ها}} =$ فراوانی نسبی هر دسته

۳- نمودار چند بر فراوانی: این نمودار نسبت به نمودار مستطیلی برای متغیرهای کمی پیوسته مناسب تر است.

✓- مرکز دسته ها را بر روی محور xها و فراوانی هر دسته را بر روی محور yها نمایش می دهیم.

✓- دو مرکز دسته با فراوانی صفر به ابتدا و انتهای دسته اضافه می کنیم تا هر دو سر نمودار به محور xها وصل شود.

✓- با متصل کردن وسط های فوقانی نمودار مستطیل ها، نمودار چند بر فراوانی بدست می آید.

✓- سطح زیر نمودار مستطیلی و چند بر فراوانی با هم برابر است.

۴- نمودار دایره‌ای: مناسب برای داده‌های کیفی، و بر مبنای فراوانی نسبی رسم می‌شود.

✓- زاویه‌ی مرکزی قطاع هر دسته از رابطه‌ی روبه‌رو به دست می‌آید: $\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360$

فراوانی هر دسته ← f_i ، فراوانی کل ← n ، فراوانی نسبی ← $\frac{f_i}{n}$

✓- زاویه‌ی مرکزی هر دسته متناسب با فراوانی نسبی هر دسته است.

۵- نمودار ساقه و برگ: مناسب برای داده‌های زیاد با دامنه‌ی تغییرات کوچک.

✓- از دو شاخص ساقه و برگ تشکیل شده که همواره اعداد موجود در شاخص برگ صعودی هستند.

۶- نمودار فراوانی تجمعی:

✓- حدود دسته‌ها را بر محور xها و فراوانی تجمعی هر دسته را بر روی محور yها نمایش می‌دهیم.

✓- نمودار تجمعی همواره صعودی است و سقف آن از n بیشتر نمی‌شود

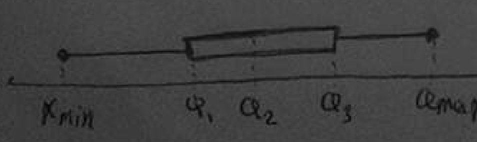
✓- اگر قسمتی از نمودار تجمعی افقی باشد، بدان معنی است که فراوانی مطلق آن دسته صفر است.

✓- بالاترین قسمت نمودار برابر تعداد کل داده‌ها یعنی $n=\sum f_i$ است.

✓- شیب خط در هر دسته با فراوانی مربوط به همان دسته ارتباط مستقیم دارد.

✓- نمودار جعبه‌ای: نموداری است که داده‌ها را به ترتیب بر اساس ۵ مقدار، ۱) کوچک‌ترین داده ۲) چارک اول ۳) چارک دوم ۴) چارک سوم ۵) بزرگ‌ترین داده نمایش می‌دهد.

✓- چارک اول (Q_1) ← میانه‌ی نیم اول داده‌ها (داده‌های قبل از میانه)



✓- چارک دوم (Q_2) ← همان میانه است.

✓- چارک سوم (Q_3) ← میانه‌ی نیمه‌ی دوم داده‌ها (داده‌های بعد از میانه).

✓- نمودار جعبه‌ای، بهترین نمودار برای نمایش پراکندگی داده‌ها است.

۱- در کدام یک از نمودارهای آماری، فقط از فراوانی نسبی برای رسم آن استفاده می‌شود؟

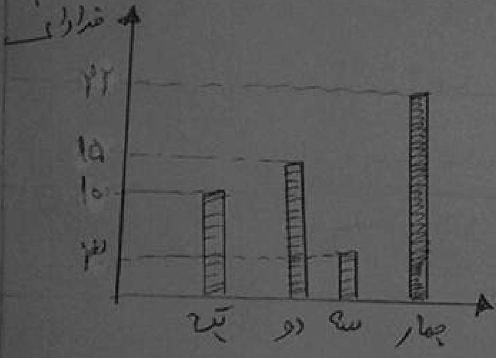
(تأمین اجتماعی) ۱) دایره‌ای ۲) چندضلعی ۳) ستونی ۴) مستطیلی پاسخ گزینه ۱

۲- در صورتی که متغیر پیوسته و یا تعداد مشاهدات زیاد باشد، استفاده از کدام نمودار بهتر است؟

(آموزش و پرورش) ۱) هیستوگرام ۲) ستونی ۳) میله‌ای ۴) دایره‌ای

پاسخ: بنابر اصول آماری به علت داده‌های بسیار زیاد که پیوسته هستند نمودار دایره‌ای بهتر است

۳- نمودار میله‌ای زیر، نشان دهنده تعداد تصادفات رانندگی ۵۰۰ خودرو در چهار منطقه یک شهر در مدت یک ماه است. زاویه مربوط به منطقه سه، در نمودار دایره‌ای کدام است؟ (دستگاه‌های اجرایی - نداگیر)

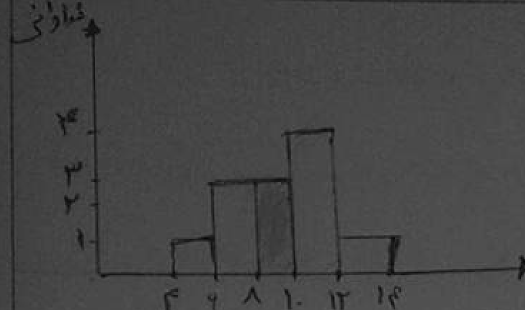


۱) ۱۰٫۸ ۲) ۲۱٫۶ ۳) ۱۵٫۲ ۴) ۱۷٫۴

فراوانی منطقه ۳

منطقه ۳ $= \frac{f_i}{n} \times 360 = \frac{۳}{۵۰} \times 360 = ۲۱٫۶$

کل فراوانی $(۳+۱۰+۱۵+۲۲=۵۰)$



۱- با توجه به نمودار مقابل فراوانی نسبی دسته دوم چقدر است؟

۱) ۰٫۳ ۲) ۰٫۲۵ ۳) ۰٫۱۵ ۴) ۰٫۲

ارتفاع دسته دوم — طول دسته دوم

حل: فراوانی نسبی دسته دوم = $\frac{\text{مساحت مستطیل دسته دوم}}{\text{مساحت کل مستطیل‌ها}} = \frac{۲ \times ۳}{۱\times۲+۳\times۲+۳\times۲+۴\times۲+۱\times۲}$

$\frac{۶}{۲۴} = ۰٫۲۵$

۲- نمودار رسم داده‌هایی که تفاوت کوچکترین و بزرگترین داده آن‌ها از نظر تعداد ارقام کم باشد، کدام نمودار مناسب است؟ ۱) دایره‌ای ۲) ساقه و برگ ۳) میله‌ای ۴) چندبر فراوانی

۳- توزیع گروه خونی افرادی به صورت

A	B	AB	O
۲۴	۱۴	۱۰	۱۲

است درصد مساحت مربوط به گروه خونی O در نمودار دایره‌ای کدام است؟ ۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

حل: $N = ۲۴+۱۴+۱۰+۱۲ = ۶۰$ کل

درصد $= \frac{\text{چیزی که از ما خواسته}}{\text{کل}} \times ۱۰۰ = \frac{\text{مساحت O}}{\text{کل مساحت‌ها}} = \frac{۱۲}{۶۰} = ٪۲۰$

۴- در نمودار ساقه و برگ زیر چند درصد داده‌ها ناکمتر از ۴۰ و کمتر از ۴۷ است؟

ساقه — برگ

۳	۲ ۲ ۲ ۳ ۴ ۴ ۵ ۶ ۷
۴	۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۷ ۷
۵	۱ ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲

حل: کل: درصد $= \frac{\text{چیزی که از ما خواسته}}{\text{کل}} \times ۱۰۰$

ناکمتر از ۴۰ یعنی از ۴۰ کمتر نباشد پس ۴۰ را شامل میشه — کمتر از ۴۷ یعنی ۴۷ را شامل نمیشه

درصد $= \frac{[۴۰ - ۴۷)}{\text{کل}} \times ۱۰۰ = \frac{۶}{۲۵} \times ۱۰۰ =$

تعداد کل = تعداد برگ‌ها

۴ | ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ✓ ✓ ⟹ ۴۰ ، ۴۱ ، ۴۲ ، ۴۳ ، ۴۴ ، ۴۵ ، ۴۶

انحراف معیار = $\sqrt{\text{واریانس}}$ $\Rightarrow$ $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2\times1 + 4\times2 + 6\times2 + 8\times4}{1+2+3+4} = \frac{60}{10} = 6$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1(2-6)^2 + 2(4-6)^2 + 3(6-6)^2 + 4(8-6)^2}{10}} = 2$$

۵- میانگین ۲۰ داده آماری برابر ۱۵ و انحراف معیار آنها برابر ۱/۵ است، درصد ضریب تغییرات آنها چقدر است؟ (آموزش و پرورش) الف) ۲۰ ب) ۱۵ ج) ۱۲ د) ۱۰

درصد ضریب تغییرات $\Leftarrow$ $C.V = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \dfrac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}} \times 100 = \dfrac{1.5}{15} \times 100 = 10$

۶- اگر واریانس داده‌های آماری $d-4$ و $c-1$ و $b+1$ و a و 10 برابر با صفر باشد میانگین a, b, c, d کدام است؟ ۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹ (تأمین اجتماعی)

حل: اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند واریانس صفر است. $\Leftarrow$ $a = 10$

$b+1=10 \Rightarrow b=9$ ، $c-1=10 \Rightarrow c=11$ ، $d-4=10 \Rightarrow d=14$

پس داده عبارتند از:

$$\begin{cases} a = 10 \\ b = 9 \\ c = 11 \\ d = 14 \end{cases} \qquad \bar{x} = \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{10+9+11+14}{4} = 11$$

* شاخص های مرکزی :

۱- میانه (Md): ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنید، اگر داده ها فرد بود، داده ی وسطی و اگر زوج بود میانگین دو داده ی وسطی، میانه است.

نکات مهم در ارتباط با میانه :

✓ در هر جامعه آماری فقط یک میانه وجود دارد.

✓ اگر یک عدد ثابت به تمام داده ها اضافه یا کم شود آن عدد به میانه نیز اضافه یا کم می گردد

✓ اگر یک عدد ثابت در تمام داده ها ضرب یا تقسیم شود آن عدد در میانه نیز ضرب یا تقسیم می شود

✓ اگر در بین داده ها، داده ای وجود داشته باشد که اختلاف آن از بقیه داده ها زیاد است از میانه به عنوان شاخص مرکزی استفاده می کنیم.

۲- مد (Mo): داده ای که بیش ترین فراوانی را داشته باشد. اگر فراوانی همه داده ها یکسان باشد مد وجود ندارد و اگر چند داده دارای بیشترین فراوانی باشند همه آن ها را مد می نامیم.

* نکات مهم در ارتباط با مد یا نما

✓- در یک جامعه آماری ممکن است مد منحصر به فرد نباشد.

✓- اگر جامعه چند مدی باشد مد شاخص معتبری نیست .

✓- اگر به تمام داده ها یک مقدار ثابت اضافه یا کم کنیم به مد نیز همان مقدار ثابت اضافه یا کم می شود.

✓- اگر تمام داده‌ها در یک مقدار ثابت ضرب یا تقسیم شوند مد نیز در آن ضرب یا تقسیم می‌شود.

✓- در بین شاخص‌های مرکزی مد از اهمیت کمتری برخوردار است در صورتی که در داده‌های کیفی مد تنها شاخص مرکزی است.

۳- میانگین $\bar{X}$ (در جدول فراوانی) $\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$ ، $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\text{جمع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}}$

میانگین حسابی — در داده‌های طبقه‌بندی شده — در داده‌ها طبقه‌بندی نشده.

* نکات مهم در ارتباط با میانگین حسابی

✓- در هر جامعه آماری فقط یک میانگین حسابی وجود دارد.

✓- اگر داده‌های آماری $x_1, x_2, \dots, x_n$ تشکیل یک تصاعد حسابی (عددی) دهند آنگاه: $\bar{X} = \frac{x_1 + x_n}{2}$

✓- میانگین تنها شاخص مرکزی است که اگر به جای کلیه داده‌ها قرار بگیرد مجموع داده‌ها تغییر نخواهد کرد.

✓- مجموع انحرافات داده‌ها از میانگین برابر صفر است یعنی

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X}) = 0 \quad or \quad \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{X}) = 0$$

✓ مجموع مربعات انحرافات داده‌ها از میانگین کمترین مقدار ممکن است یعنی:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = min \quad or \quad \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2 = min$$

۷- اگر همه داده‌های آماری را با یک عدد جمع یا تفریق کنیم، میانگین نیز با آن عدد جمع یا تفریق می‌شود

۸- اگر همه داده‌های آماری را در یک عدد ضرب یا تقسیم کنیم، میانگین نیز در آن عدد ضرب یا تقسیم می‌شود

تعریف میانگین وزن‌دار (وزنی):

اگر داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ دارای ضریب‌های $w_1, w_2, \dots, w_n$ باشند در این صورت میانگین داده‌ها با احتساب ضرایب به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{x}_w = \text{میانگین وزنی} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

۱- جامعه آماری با ۱۵ داده به صورت زیر دسته‌بندی شده است. میانگین جامعه کدام است؟ (آموزش و پرورش)

دسته‌ها	۷-۱۱	۱۱-۱۵	۱۵-۱۹	۱۹-۲۳
فراوانی	۴	۵	۲	۴

۱) ۱۲٫۶ ۲) ۱۳٫۹
۳) ۱۴٫۶ ۴) ۱۵٫۹

حل: قبلاً گفته شد که در جدول فراوانی میانگین از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}$$

ما برای به دست آوردن میانگین نیاز به ~~جدول فراوانی~~ داریم (نیاز به داده داریم) این جدول، جدول دسته‌بندی است، خب باید چکار کنیم؟ ما می‌توانیم مرکز طبقات را به دست آوریم، مرکز طبقات نماینده طبقات است حکم داده را دارد ⇐

مرکز x_i	۹	۱۳	۱۷	۲۱
فراوانی f_i	۴	۵	۲	۴

$$\bar{x} = \frac{9\times4 + 13\times5 + 17\times2 + 21\times4}{4+5+2+4} = 14.6$$

مرکز دسته اول $= \frac{7+11}{2} = 9$

۲- در جدول فراوانی تجمعی زیر، میانگین داده ها کدام است (دستگاه های اجرایی - فراگیر)

مرکز دسته	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹
فراوانی تجمعی	۸	۲۴	۴۴	۶۸	۸۰

الف) ۲۶٫۸ ب) ۲۷٫۱ ج) ۲۷٫۲ د) ۲۶٫۷

حل: برای بدست آوردن میانگین:

نیاز به جدول فراوانی داریم (داده و فراوانی مطلق) تو این جدول داده (مرکز دسته) داریم ولی فراوانی مطلق نداریم. با توجه به فراوانی تجمعی ما می توانیم فراوانی مطلق را محاسبه کنیم (برای داده ها، جدول)

مرکز دسته x_i	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹
فراوانی f_i	۸	۱۶	۲۰	۲۴	۱۲

(۲۴-۸=۱۶، ۴۴-۲۴=۲۰، ۶۸-۴۴=۲۴، ...)

اختلاف دو تا فراوانی تجمعی متوالی

اولین دسته فراوانی مطلق آن با فراوانی تجمعی طبقه اول برابر است

$$\bar{x}=\frac{\sum f_i\cdot x_i}{\sum x_i}=\frac{25\times 8+26\times 16+27\times 20+28\times 29}{8+16+20+24+12}=27.2$$

۳- در جدول فراوانی تجمعی داده های مقابل، واریانس چقدر است؟

۱) ۱٫۷۵ ۲) ۲ ۳) ۲٫۲۵ ۴) ۲٫۵

حدود طبقات	۰-۲	۲-۴	۴-۶	۶-۸
فراوانی تجمعی	۱	۳	۱۲	۱۶

نکته: اگر بخواهیم جدول برای حد، واریانس، میانگین، دفعات و ... ما باید جدول فراوانی داشته باشیم

این جدول فراوانی تجمعی است جدول فراوانی اینه $\frac{\text{داده یا مرکز دسته}}{\text{فراوانی مطلق}}$

پس ما باید حدود طبقات را به داده، یا مرکز دسته و فراوانی تجمعی را به فراوانی مطلق تبدیل کنیم

مرکز طبقات	۱	۳	۵	۷
فراوانی	۱	۲	۹	۴

$$\bar{x}=\frac{1+6+45+28}{16}=5$$

$$\sigma^2=\frac{1(16)+2(4)+9(5)+4\times 4}{16}=\frac{5}{2}=2.5$$

* شاخص های پراکندگی:

۱- دامنه تغییرات (R): $R = x_{max} - x_{min}$ ← کوچکترین داده - بزرگترین داده = R

۲- انحراف از میانگین (اختلاف از میانگین) (MD)

$$MD = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

* نکات مهم در ارتباط با انحراف از میانگین *

✓- اگر همه داده ها با هم برابر باشند انحراف از میانگین آن برابر صفر است و برعکس

✓- اگر به تمام داده ها عدد ثابتی کم یا اضافه کنیم انحراف از میانگین تغییر نمی کند.

✓- اگر تمام داده ها را در عدد ثابتی مانند a ضرب یا تقسیم کنیم انحراف از میانگین آن ها در قدر مطلق a (|a|) ضرب یا تقسیم می شود.

✓ اگر داده های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تشکیل یک تصاعد حسابی (عددی) با قدر نسبت d بدهند آنگاه انحراف از میانگین آن ها را به صورت زیر نیز می توان بدست آورد

$$MD = \begin{cases} \dfrac{nd}{4} & \text{: زوج } n \\[2ex] \dfrac{(n^2-1)\cdot d}{4n} & \text{: فرد } n \end{cases}$$

۳- واریانس (σ^2):

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\underset{\text{داده}}{x_i} - \underset{\text{میانگین}}{\bar{x}})^2}{\underset{\text{تعداد داده ها}}{n}} = \frac{\overset{\text{مجموع مجذورات داده ها}}{\sum x_i^2}}{\underset{\text{تعداد داده ها}}{n}} - \underset{\text{مجذور میانگین}}{\bar{x}^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}$$ در جدول فراوانی

میانگین مساحت ★

نکات مربوط به واریانس

- هرچه واریانس به صفر نزدیکتر باشد پراکندگی بین داده ها کمتر است.
- اگر تمام داده ها با هم برابر باشند واریانس صفر است و برعکس.
- اگر همه داده ها را با یک عدد ثابت جمع یا تفریق کنیم واریانس تغییر نمی کند.
- اگر تمام داده ها را در عدد ثابتی مانند a ضرب یا تقسیم کنیم واریانس آن ها در a^2 ضرب یا تقسیم می شود.
- اگر داده های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تشکیل یک تصاعد حسابی (عددی) با قدر نسبت d دهند آنگاه:

$$\sigma^2 = \frac{(n^2-1)d^2}{12}$$

۴- انحراف معیار: جذر مثبت واریانس (σ) $\quad \sigma = \sqrt{\text{واریانس}}$

نکات مهم در ارتباط با انحراف معیار

- اگر تمام داده ها با هم برابر باشند انحراف معیار صفر است و بالعکس.
- اگر همه داده ها را با یک عدد ثابت جمع یا تفریق کنیم انحراف معیار تغییر نمی کند.
- اگر تمام داده ها در عدد ثابتی مانند a ضرب و تقسیم کنیم انحراف معیار آن ها در $|a|$ ضرب و تقسیم می شود.
- اگر داده های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تشکیل یک تصاعد حسابی (عددی) با قدر نسبت d دهند آنگاه:

$$\sigma = d\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

۵- ضریب تغییرات (بدون واحد است) $C.V$ $\quad C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

جامعه ای که دارای ضریب تغییرات کمتری باشد، دارای عملکرد بهتری است.

نکات مهم در ارتباط با ضریب تغییرات

✓- اگر همه داده ها باهم برابر باشند ضریب تغییرات صفر است.

✓- اگر همه داده ها را در یک عدد ثابت ضرب کنیم ضریب تغییرات تغییر نمی کند.

✓- اگر به همه داده ها عددی مثبت اضافه کنیم چون میانگین بزرگتر می شود ولی انحراف معیار تغییر نمی کند، ضریب تغییرات داده های جدید کوچکتر از ضریب تغییرات داده های اولیه می شود

✓- اگر از تمام داده ها عددی مثبت را کم کنیم چون میانگین کوچکتر می شود ولی انحراف معیار تغییر نمی کند، ضریب تغییرات داده های جدید بزرگتر از ضریب تغییرات داده های اولیه می شود.

✓- ضریب تغییرات یک عدد ثابت برابر با صفر است.

✓- اگر همه داده ها را در عددی منفی ضرب کنیم ضریب تغییرات نیز منفی خواهد شد.

۱- واریانس داده های ۱۲۵۶، ۱۲۵۸، ۱۲۶۰، ۱۲۵۹، ۱۲۵۷ کدام است؟ (آموزش و پرورش)

الف) ۲ ب) ۲.۵ ج) ۳ د) ۳.۵

واریانس $\sigma^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$ ، $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{7+9+10+8+6}{5}=8$

$$\sigma^2=\frac{(7-8)^2+(9-8)^2+(10-8)^2+(8-8)^2+(6-8)^2}{5}=2$$ «گزینه الف»

۲- واریانس داده های ۱۲۹۹، ۱۳۰۴، ۱۳۰۳، ۱۳۰۷، ۱۳۰۲ کدام است؟ (آموزش و پرورش)

الف) ۴.۵ ب) ۴.۳ ج) ۶.۸ د) ۶.۴

حل:

$$\bar{x}=\frac{2+7+3+4+(-1)}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$\sigma^2=\frac{(2-3)^2+(7-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(-1-3)^2}{5}=6.8$$

۳- انحراف معیار داده های آماری ۷۴، ۶۲، ۷۰، ۶۶، ۷۸ کدام است؟ (دستگاه های اجرایی - مختلف)

الف) $2\sqrt{2}$ ب) ۴ ج) ۲ د) $4\sqrt{2}$

حل: $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n} \rightarrow \sigma^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n} \rightarrow \sqrt{\text{واریانس}}=\sigma$ انحراف معیار

$$\bar{x}=\frac{66+70+62+74+78}{5}=70$$

$$\sigma^2=\frac{(66-70)^2+(70-70)^2+(62-70)^2+(74-70)^2+(78-70)^2}{5}=32 \Rightarrow \sigma=\sqrt{32}$$

$$\Rightarrow \sigma=4\sqrt{2}$$

۴- انحراف معیار داده های جدول مقابل چقدر است؟ (آموزش و پرورش)

x_i	2	4	6	8
f_i	1	2	3	4

الف) 1 ب) ۲ ج) 3 د) 4

۴- اگر ۴۰ و ۳۲ ، حدود دسته سوم جدول فراوانی با ۵ دسته باشد، مرکز دسته دوم کدام است؟

(آموزش و پرورش) ۱) ۳۰ ۲) ۲۸ ۳) ۲۶ ۴) ۲۴

حل: طول دسته = کران بالا - کران پایین = ۴۰ - ۳۲ = ۸

دسته سوم   دسته سوم

کران پایین دسته سوم = کران بالای دسته دوم = ۳۲ ، کران پایین - کران بالا = طول دسته

۸ = ۳۲ - کران پایین ⟸ کران پایین = ۳۲ - ۸ = ۲۴

پس حدود دسته دوم برابر است با (۲۴ و ۳۲) ⟸

مرکز دسته دوم = (کران بالای دسته دوم + کران پایین دسته دوم) / ۲ = (۲۴ + ۳۲) / ۲ = ۲۸   گزینه ۲

۵- داده‌های جدول مقابل، داده‌های آماری پیوسته است. چند درصد داده‌ها، در فاصله ی (۱۸/۵ - ۲۱/۵) قرار دارند؟ ۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

مرکز دسته	۱۴	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶
فراوانی تجمعی	۵	۱۳	۲۵	۳۴	۴۰

درصد = (فراوانی دسته مورد نظر / کل) × ۱۰۰

مرکز دسته (۱۸/۵ - ۲۱/۵) برابر ۲۰ است، یعنی دسته سوم می‌باشد، فراوانی دسته سوم برابر است با: $F_3 = Fc_3 - Fc_2 = 25 - 13 = 12$

درصد داده‌های دسته سوم = (فراوانی دسته سوم / فراوانی کل) × ۱۰۰ = $\frac{12}{40} \times 100 = 30$

در جدول فراوانی تجمعی، فراوانی تجمعی طبقه آخر برابر فراوانی کل داده است $\sum f_i = 40$ گزینه ۳

۶- در جدول فراوانی تجمعی دسته‌بندی شده، اگر درصد فراوانی نسبی دسته‌ی وسط ۲۴ باشد، فراوانی مطلق دسته‌ی چهارم کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

مرکز دسته	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱
فراوانی تجمعی	۵	۱۴	۹	۴۱	۵۰

پاسخ: در جدول فراوانی تجمعی - فراوانی طبقه آخر برابر مجموع کل فراوانی‌ها است یعنی $\sum f_i = 50$

$F_3 = Fc_3 - Fc_2 = a - 14$ ، $P_3 = \frac{F_3}{\sum f_i} \times 100 \Rightarrow 24 = \frac{a-14}{50} \times 100 \Rightarrow$

$a = 26 = Fc_3 \Rightarrow F_4 = Fc_4 - Fc_3 = 41 - 26 = 15$

۷- ۴۰ داده آماری در یک جدول توزیع فراوانی با ۸ دسته طبقه‌بندی شده است، اگر مجموع فراوانی‌های نسبی تا طبقه هفتم برابر ۰٫۷۵ باشد آنگاه، فراوانی طبقه هشتم کدام است؟ ۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹

قبلاً ذکر شده بود که در جدول فراوانی مجموع فراوانی‌های نسبی برابر ۱ است

$\sum_{i=1}^{8} \bar{f}_i = 1 \Rightarrow \bar{f}_1 + \cdots + \bar{f}_7 + \bar{f}_8 = 1 \Rightarrow 0.75 + \bar{f}_8 = 1 \Rightarrow \bar{f}_8 = 0.25$

$\bar{f}_8 = \frac{f_8}{N} \Rightarrow f_8 = 0.25 \times 40 = 10$

۸- اگر فراوانی نسبی طبقه‌ای ۰٫۱۵ و فراوانی مطلق همین طبقه ۱۲ باشد فراوانی تجمعی طبقه آخر کدام است؟ ۱) ۶۰ ۲) ۷۰ ۳) ۸۰ ۴) ۹۰

حل: از آنجا که فراوانی تجمعی طبقه آخر همان تعداد کل داده‌هاست پس می‌توان نوشت: $f_i = 12$ ، $\bar{f}_i = 0.15$ ، $\bar{f}_i = \frac{f_i}{N} \Rightarrow N = \frac{f_i}{\bar{f}_i} = \frac{12}{0.15} \Rightarrow N = 80$

۹- اگر فراوانی تجمعی طبقه پنجم ۳۲ و فراوانی مطلق آن ۸ باشد فراوانی تجمعی طبقه چهارم کدام است؟ ۱) ۲۴ ۲) ۲۶ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

فراوانی تجمعی طبقه چهارم + فراوانی مطلق طبقه پنجم = فراوانی تجمعی طبقه پنجم

$Fc_5 = f_5 + Fc_4 \Rightarrow 32 = 8 + fc_4 \Rightarrow fc_4 = 24$

۱- در یک نمونه گیری از حرکات اتومبیل ها، f تعداد اتومبیل ها با x سرنشین است. چند درصد اتومبیل ها با سرنشین ۳ یا ۴ نفر هستند؟ ۱) ۴۵ ۲) ۵۴ ۳) ۵۸ ۴) ۶۰

x	۱	۲	۳	۴	۵
f	۹۰	۱۸۰	۲۲۰	۲۶۰	۵۰

حل: ۹ مفهوم جدول

x	۱
f	۹۰

۹۰ اتومبیل یک سرنشین دارد

* هر موقع درصد را خواستن اول نسبت کن (یعنی تقسیم بر کل کن) بعد ضرب ۱۰۰ کن.

خواسته سوال را (آنچه که سوال از ما می خواد) که اینجا ۳ یا ۴ سرنشین است.

$$\text{درصد} = \frac{\text{خواسته}}{\text{کل}} \times 100 = \frac{\text{۳ یا ۴ سرنشین}}{\text{کل}} \times 100 = \frac{220+260}{90+180+260+220+50} \times 100$$

$$\frac{480}{800} \times 100 = 60$$

۲- در ۵۶ داده ی آماری، بزرگترین و کوچکترین آن ها به ترتیب ۸۶ و ۶۵ است. این داده ها به هفت طبقه دسته بندی شده اند، اگر داده هایی که در یک دسته قرار دارند یکسان در نظر گرفته شوند، مقدار مشترک آن ها در دسته پنجم کدام است؟

۱) ۷۷ ۲) ۷۷٫۵ ۳) ۷۸ ۴) ۷۸٫۵

حل: $R = x_{max} - x_{min} = 86 - 65 = 21$ ، $\text{طول دسته} = \frac{R}{\text{تعداد دسته}} = \frac{21}{7} = 3$

پس دسته ها به صورت ۶۵-۶۸ و ۶۸-۷۱ و ۷۱-۷۴ و ۷۴-۷۷ و دسته پنجم ۷۷-۸۰ می باشد ⇐

$$\text{مقدار مشترک} = \frac{\text{کران بالا} + \text{کران پایین}}{2} = \frac{77+80}{2} = 78.5$$

۳- ۸۰ داده ی آماری را در ۱۶ طبقه دسته بندی کرده ایم، اگر کوچکترین و بزرگترین داده ی آماری به ترتیب برابر ۱۳ و ۱۲۵ باشد کران بالای دسته دهم کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۸۳ ۳) ۵۴ ۴) ۵۸

حل: $K = 16 \Rightarrow c = \frac{R}{K} = 7$ و $R = x_{max} - x_{min}$

$\Rightarrow R = 125 - 13 = 112$

بنابراین دسته اول به صورت $[13-20)$ می باشد.

برای محاسبه کران بالای دسته دهم داریم

$$b_{10} = \underbrace{b_1}_{\text{کران بالای دسته اول}} + 9 \times \underbrace{c}_{\text{طول دسته}} = 20 + 9 \times 7 = 83$$

۴- میانگین داده های ۳ و ۵ و x و ۱ و ۲ برابر ۳ است میانه این داده ها کدام است؟

۱) ۳٫۵ ۲) ۲٫۵ ۳) ۳ ۴) ۴٫۵

$\bar{x} = \frac{1+2+x+3+5}{5} \Rightarrow 3 = \frac{11+x}{5} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow$ داده ها = ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵

$\Rightarrow md =$ داده وسطی $= 3$

۵- در داده های آماری، داده ای که بیشترین فراوانی را دارد، کدام است؟

۱) میانه ۲) میانگین ۳) چارک اول ۴) مد یا نما

۶- در داده های آماری ۵ و ۲ و ۱ و ۳ و ۹ و ۵ و ۸ و ۳ و ۳ و ۵ و ۳ مجموع میانه و مد چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

ابتدا داده ها را به صورت صعودی مرتب می کنیم:

۱ ۲ ۳ ۳ ۳ ۳ ۵ ۵ ۵ ۸ ۹

$md =$ داده وسطی $= x_6 = 3$ ، $mo =$ داده ای که بیشترین فراوانی را دارد $= 3$

$md + mo = 3 + 3 = 6$

۷- با توجه به داده های آماری ۴ و ۱۰ و ۱۰ و ۹ و ۷ اندازه، کدام شاخص زیر با تغییر اندازه داده ۹ به ۱۰ تغییر خواهد کرد؟ ۱) دامنه تغییرات ۲) میانه ۳) میانگین ۴) نما

با تغییر اندازه داده ۹ به ۱۰ دامنه تغییرات، میانه و نما تغییر نمی کند ولی میانگین تغییر می کند ← 3

۸- ششمین عددی که با قرار گرفتن در بین داده های ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ موجب می گردد، میانگین، میانه و مد آن ها برابر گردد چیست؟ ۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۹- در یک جامعه آماری فاصله داده ها از یکدیگر ۴، بیشترین داده ۴۲ و تعداد داده ها برابر ۱۰ است میانه این داده چقدر است؟ ۱) ۲۰ ۲) ۲۲ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

۱۰- میانه داده های $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}, n \le 10\}$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۳۶ ۴) ۶۴

۷- اگر ضریب تغییرات هشت داده آماری x_1، x_2، ...، x_8 برابر با صفر و میانگین این هشت داده برابر با $\frac{5}{2}$ باشد، میانگین داده‌های x_1، x_2، x_3، x_4، و 5 کدام است؟ (دستگاههای اجرایی - مدارس)

الف) ۶ ب) ۵ ج) ۴ د) ۳

حل: $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0 \Rightarrow \sigma = 0 \Rightarrow$ داده‌ها برابرند

$\Downarrow$

همه داده‌ها $\frac{5}{2}$ اند

$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ ضریب تغییرات (σ ← انحراف معیار، $\bar{x}$ ← میانگین)

پس داده عبارتند از
$\left\{ \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 5 \right. \Rightarrow \bar{X} = \dfrac{\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$

۸- دو جامعه دارای مقیاس‌های اندازه‌گیری متمایز هستند، برای مقایسه پراکندگی داده‌های آماری دو جامعه، کدام شاخص مناسب است؟ (آموزش و پرورش)

الف) ضریب تغییرات ب) دامنه تغییرات ج) واریانس د) انحراف معیار

پاسخ: اگر مایل باشیم پراکندگی بین داده‌های دو یا چند جامعه آماری را که واحد اندازه‌گیری آن‌ها یکسان نیست با هم مقایسه کنیم واریانس و انحراف معیار آن‌ها امکان‌پذیر نمی‌باشد یا اگر بخواهیم پراکندگی داده‌های دو یا چند جامعه‌ای که انحراف معیار آن‌ها تقریباً یکسان است ولی میانگین آن‌ها متفاوت می‌باشد را با هم مقایسه کنیم روش‌های قبلی نتایج مطلوبی را در اختیار ما قرار نمی‌دهند. در چنین شرایطی باید از ضریبی استفاده کنیم که بعد نداشته باشد یا پراکندگی داده‌ها را نسبت به مرکز آن‌ها تعدیل کند. برای این منظور از پارامترهای نسبی پراکندگی استفاده می‌کنیم که معروف‌ترین آن‌ها عبارتند از: ضریب تغییرات (ضریب پراکندگی)، ضریب چولگی، ضریب کشیدگی ⟸ گزینه یک صحیح است

* آنالیز ترکیبی = ترکیبیات

آنالیز ترکیبی یا ترکیبیات یعنی چه؟ یعنی چگونه بدون شمارش بشماریم

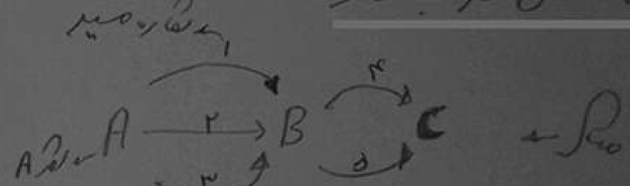
ما برای شمردن تعداد این خانه‌ها به جای اینکه دونه دونه بشماریم میگیم 3x4 یعنی

داریم از اصل ضرب استفاده می‌کنیم، بعضی مواقع باید از اصل جمع استفاده کنیم

پس چگونه می‌توانیم بدون شمارش بشماریم ←

- اصل ضرب (۱)
- اصل جمع (۲)
- جایگشت (۳)
- ترتیب (۴)
- ترکیب (۵)

۱) اصل ضرب = و



✓ برای رفتن از A به B سه مسیر (۱-۲-۳) وجود دارد و از B به C دو مسیر (۴-۵) وجود

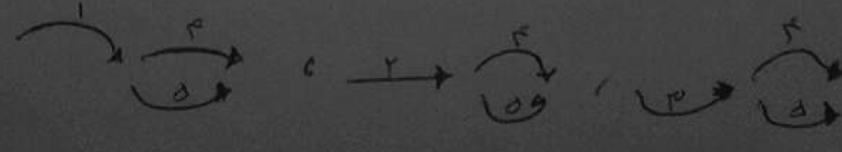
دارد. پس برای رفتن از A به C و با عبور از B چند مسیر وجود دارد؟ ۳×۲=۶

۲) اصل جمع = یا

✓ برای رفتن از A به C اگر از مسیر یک برویم دو مسیر سر راهمون قرار داره (۴و۵)

و یا اگر از مسیر دو برویم باز هم دو مسیر (۴و۵) و یا اگر از مسیر سه برویم باز هم دو مسیر (۴و۵)

وجود داره. پس برای رفتن از A به C چند مسیر وجود داره؟ ۲+۲+۲=۶



۲ + ۲ + ۲ = ۶

مثال یک: ۳ دانش آموز سال اول و ۴ دانش آموز سال دوم به تصادف در یک ردیف قرار می گیرند تعداد حالاتی که نفر وسطی دانش آموز سال اول باشد چقدر است؟

حل: تعداد کل دانش آموزان ۷ هستند، می خوان اینا کنار هم بشینند و یه شرط گذاشته و شرطم هم اینه که نفر وسطی دانش آموز سال اول باشه.

* تو سیستم آنالیز و احتمال همیشه از خونه شرط شروع می کنیم.

خونه شرط

۶	۵	۴	۳	۳	۲	۱
"	"	"	حالت	"	"	"

خونه شرط یا (نفر وسط)

۳ حالت است چرا؟

چون تو صورت سوال ذکر شده تعداد حالاتی که نفر وسطی دانش آموز سال اول باشه و از طرفی تعداد دانش آموزان سال اول ۳ هستند پس میشه ۳ حالت

چرا خونه اول شد ۶؟ چون کل دانش آموزان ۷ هستند و ما گفتیم همیشه از خونه شرط شروع می کنیم و خونه شرط ۳ حالت داره یکیشون می شینه پس از این ۷ میشه ۶

چرا خونه دوم شد ۵؟ یه دانش آموز تو خونه شرط نشست یکی هم تو خونه اول پس چندتای دیگه میمونه ۵ تا یعنی تو خونه دوم ۵ حالت داریم که دانش آموز می تونه بشینه همینطور ادامه بدید ...

پس جواب نهایی طبق اصل ضرب $3 \times 6!$

$6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1$

خونه وسطی

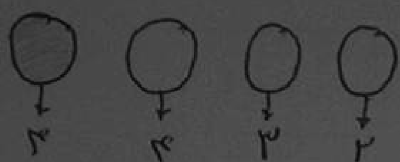
مثال دوم: چند عدد چهار رقمی با ارقام فرد و متمایز بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

حل: کلمه متمایز یعنی متفاوت یعنی بدون تکرار، ارقام فرد ۹، ۷، ۵، ۳، ۱

گفته چهار رقمی پس چهار دایره می کشیم

گفتیم همیشه از خونه شرط شروع می کنیم

و خونه شرط تو این مثال خونه اولیه



چرا خونه اولی (خونه شرط) ۴ شد؟ تعداد ارقام فرد ۵ تا هستند و ۴ تای آن (۹-۷-۵-۳)

می تونند تو این خونه قرار بگیرند و این چهار تا هستند که اعداد بزرگتر از ۳۰۰۰ تشکیل می دهند

چرا خونه دومی شد چهار؟

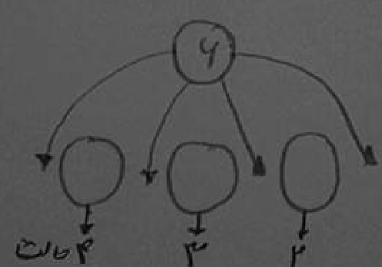
تعداد ارقام فرد ۵ تا بودن یکیش تو خونه شرط قرار گرفت پس چهار تای دیگه مونده ...

⇐ طبق اصل ضرب جواب نهایی برابر است با: ۴×۴×۳×۲ = ۹۶

مثال سوم: به چند طریق می توان با ارقام ۳، ۶، ۷، ۴، ۱ یک عدد چهار رقمی (بدون تکرار) ساخت

به طوری که حتماً شامل رقم ۶ باشد؟

اول میریم سراغ خونه شرط (همواره شامل رقم ۶ باشد) یعنی شش می تونه اول باشه



یا دوم باشه یا سوم باشه یا چهارمی پس ۶ می تونه ۴ حالت داشته باشه

از بین اعداد (۱،۴،۷،۶،۳) رقم ۶ تکلیفش

مشخص شد پس چهار عدد دیگه مونده ⇐ تو خونه اول ۴ حالت تو خونه دومی ۳ حالت

تو خونه سومی دو حالت ⇐ جواب نهایی برابر است با: ۴×۴×۳×۲ = ۹۶

الف: فاکتوریل (!) یک سیستم کاربردی هستش که ضرب های شما را مختصر می کند (کوچک تر می کند)

$6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1$ $\qquad 1! = 1 \qquad 0! = 1$

$n! \overset{\text{برابر}}{=} \underset{\text{خودش (n)}}{n}\underbrace{(n-1)}_{\text{یکی کمتر از خودش (یکی کمتر از n)}}\times\cdots\times 1$ ← هر چیزی که پشت فاکتوریل باشد که اینجا n است

این کار آنقدر ادامه پیدا می کند تا به یک برسد

مثل: $\dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{\overset{\text{خودش}}{(n+1)}\overset{\text{یکی کمتر از خودش}}{n!}}{n!} = (n+1)$

۳- جایگشت

جایگشت = جای + گشت = به طرز قرار گرفتن n شی متمایز (متفاوت) کنار یکدیگر را جایگشت

آن n می گویند و برابر است با $n!$ عکس ها متمایز باشند

مثل: سه دوست با نام های A و B و C می خواهند عکس یادگاری بگیرند چند حالت وجود دارد؟

✓ از روش قبلی (اصل ضرب) $\underset{3}{\bigcirc}\ \underset{2}{\bigcirc}\ \underset{1}{\bigcirc} \rightarrow \overbrace{3\times2\times1}^{\text{۶ حالت}}$

✓ از جایگشت هم می توانیم استفاده کنیم طبق تعریف به طرز قرار گرفتن n شی

متمایز (متفاوت) کنار یکدیگر را جایگشت آن n شی گویند و برابر است با $n!$

$A, B, C \qquad 3! = 6$

جایگشت مدل دیگری هم دارد <
- جایگشت با تکرار حروف
- جایگشت به صورت دسته بندی

۴- ترتیب

ترتیب = تعداد انتخاب r شی از میان n شی و چیدمان آن r شی

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

۵- ترکیب

ترکیب = تعداد انتخاب r شی از میان n شی

$$C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

چیدمان برای ما اهمیتی ندارد یا ترتیب مهم نیست.

[illegible]

مثال: کیسه‌ای شامل ۸ مهره ۳ مهره را می‌خواهیم خارج کنیم

پس چیدمان برای ما مهم نیست ⇐ $C(n,3)=\frac{n!}{5!\times 3!}=56$

نکته: برای ترکیب می‌توانیم از نکته زیر استفاده کنیم تا گرفتار فاکتوریل نشویم.

$$C(n,r)=\binom{n}{r} \qquad (8,3)=\frac{6\times 7\times 8}{1\times 2\times 3}=56$$

✓ تو صورت ۸ را می‌نویسیم تو مخرج ۳ را بعد تو مخرج میایم عقب تا یکی برسیم

تعداد اعداد صورت باید برابر اعداد مخرج باشد ما تو مخرج دوتا اومدیم عقب پس تو صورت هم دوتا میایم عقب

$$\binom{10}{2}=\frac{9\times 10}{1\times 2}=45$$

✓ اگر راه حل اول طولانی بود از این راه می‌رویم

$$\binom{10}{9}=\binom{10}{1}=\frac{10}{1}=10$$

$10-9$

$$\binom{5}{3}=\binom{5}{3}=\frac{4\times 5}{1\times 2}$$

- جایگشت با تکرار حروف

۱- با حروف کلمه مهربان چندتا حروف متمایز کنار هم میتوان نوشت؟

مهربان = م - هـ - ر - ا - ب - ن ← !۶ این مثال بدون تکرار حرف بود اما با تکرار ←

✓ با حروف کلمه مسلمانان، ؟ (می خواهیم بدونیم چندتا جایگشت دارد و چند حالت می تونند کنار هم قرار بگیرند) اول بازش می کنیم مسلمانان = م-س-ل-م-ا-ن-ا-ن

حروف (ن - م - ا) هرکدام دوبار تکرار شده جایگشت ندارن یعنی جابجاشون عوض بشه حالت جدیدی ایجاد نمی کنند م م ⇐ تعداد جایگشت اینجوری حساب میشه

تعداد کل حروف

$$\frac{8!}{2!\times 2!\times 2!}=\frac{8\times 7!}{8}=7!$$

ن م ا

دوبار تکرار شده ← !۲

$$\frac{\text{تعداد کل حروف}}{\text{تکراری ها (ضرب آن ها)}}$$

- جایگشت به صورت دسته بندی =

حروف A،B،C،D،E به چند حالت می تونند کنار هم دیگر قرار بگیرند؟ ۱۲۰ = !۵ ← ABCDE

✓- حروف A،B،C،D،E به چند حالت می تونند کنار هم قرار بگیرند به شرطی که BC کنار هم باشند

اینجاست که باید از دسته بندی استفاده کنیم اونایی که باید کنار هم دیگه قرار گیرند را داخل بسته قرار می دهیم ⇐

A (BC) D E

تعداد حالات برابر است با ۴۸ = !۲ × !۴ ←

← تعداد شی ها (A، D، E، بسته)

که چون بسته نداریم چندتا حرف توشه فقط اون بسته را یکی حساب می کنیم

← داخل بسته دو حرف B و C قرار دارند پس در دو حالت می تونند چیدمان داشته باشند (یا B اول باشه یا C یعنی CB یا BC)

۱- با حروف کلمه آموزش چند کلمه پنج حرفی می‌توان ساخت به طوری که ز حرف وسط کلمه باشد؟

(آموزش پرورش) الف) 120 ب) 96 ج) 54 د) 24

• پاسخ: ۵ مربع می‌کشیم (چون کلمه باید پنج حرفی باشد)

خونه شرط

$\boxed{\ }\ \boxed{\ }\ \boxed{\ }\ \boxed{\ }\ \boxed{\ }$

۴ ۳ ۱ ۲ ۱

حالت

بعد از خونه شرط شروع می‌کنیم

$۴\times۳\times۱\times۲\times۱=۲۴$

تعداد حالات خونه شرط‌ها یک حالت (ز) ۰ (ما پنج حرف داشتیم یکیش تو خونه شرط قرار گرفت ← ۴)

۲- با ارقام ۳،۷،۷،۵،۷،۷،۷،۳،۷،۷،۷،۷ چند عدد ۱۲ رقمی می‌توان نوشت؟

(دستگاه‌های اجرایی - فراگیر) الف) ۱۳۲۰ ب) ۶۶۰ ج) ۳۳۰ د) ۲۶۴۰

• پاسخ: جایگشت با تکرار $۶۶۰ = \frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۲} = \frac{۱۲!}{۹!\times۲!} = \frac{\text{تعداد کل اعداد}}{\text{تکراری‌ها}}$

تعداد اعداد ۷ تکرار شده

۳- با حروف کلمه استقلال، چند کلمه چهار حرفی می‌توان نوشت به طوری که حرف الف یک در میان ظاهر شود؟ (دیوان محاسبات) الف) ۱۲ ب) ۲۴ ج) ۳۶۰ د) ۷۲۰

• پاسخ: ۴ مربع می‌کشیم بعد از خونه‌ی شرط‌ها شروع می‌کنیم

$\boxed{۱}\ \boxed{۴}\ \boxed{۱}\ \boxed{۳}$

خونه شرط‌ها

خونه شرط‌ها

دوتا تو خونه شرط‌ها یکی هم خونه قبلی ← ۳ تا موند

شش تا حرف داشتیم دو تا از آنها تو خونه‌های شرط‌ها قرار گرفت ← ۴ تا ماند

← تعداد کلمات چهار حرفی برابر است با (طبق اصل ضرب) $۱\times۴\times۱\times۳=۱۲$

۴- چند عدد شش رقمی با ارقام {۰،۱،۲،۳،۴،۵} می‌توان ساخت، به طوری که فقط صفر یک در میان و تکراری ظاهر شود؟ (آموزش پرورش)

الف) ۱۲۰ ب) ۹۰ ج) ۶۰ د) ۳۰

پاسخ: اول از خونه شرط شروع می‌کنیم

۵	(۰) ۱	۴	(۰) ۱	۳	(۰) ۱

خونه‌های شرط

$$5\times1\times4\times1\times3\times1 = 60$$

* صفر در سمت چپ نباید باشد (دقت به شش رقمی شدن)

۵- به چند طریق می‌توان از اعداد صفر تا ۹ شماره تلفن ۸ رقمی ساخت؟ (آموزش و پرورش)

الف) 10^8 ب) 10×9^9 ج) 9×10^7 د) 9×10^{10}

پاسخ گزینه ج

۹	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰

۶- یک اداره دارای ۵ سواری و ۴ وانت بار می‌باشد، به چند طریق می‌توان ۳ ماشین انتخاب کرد تا برای مأموریت به سه شهرستان متفاوت اعزام شوند. به طوری که حداقل ۲ سواری بین ماشین‌های اعزامی باشد؟ (تأمین اجتماعی) ۱) ۱۴۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۸۰ ۴) ۵۰

پاسخ: سواری‌های انتخابی

۳ سواری + یا ۲ سواری و ۱ وانت

$$\binom{5}{3} + \binom{4}{1}\times\binom{5}{2} = \frac{3\times4\times5}{1\times2\times3} + \frac{4}{1}\times\frac{4\times5}{1\times2}$$

$$= 50$$

۷- یک میوه فروش می‌خواهد ۳ جعبه پرتقال، ۴ جعبه سیب و دو جعبه نارنگی را در سه ردیف به طور ستونی روی هم قرار دهد، به طوری که میوه‌ها در هر ستون از یک نوع باشند، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟ (وزن تمام جعبه‌ها متفاوت است)

(دستگاه‌های اجرایی - خداگیر) الف) ۱۷۲۸ ب) ۴۳۲ ج) ۸۶۴ د) ۲۸۸

حل

$$2!\times3!\times4!\times\underbrace{3!}_{\text{جایگشت ستون}} = 2\times6\times24\times6 = 1728$$

۸- با استفاده از اعداد ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۵ چند عدد چهار رقمی فرد بدون تکرار می‌توان نوشت؟

گفتیم چند عدد ۴ رقمی، ۴ خونه می‌کشیم، بعد از خونه شرط شروع می‌کنیم.

(شمارش خونه‌ها از چپ به راست) $\boxed{۲}\ \boxed{۲}\ \boxed{۳}\ \boxed{۳}$ = ۳×۳×۲×۲ = ۳۶

این خونه شرط ماست! چرا؟ چون ما می‌خواهیم اعداد فرد بسازیم برای اینکه اعداد فرد باشند باید رقم یکان آن فرد باشد، تو اعداد فردها دوتا هستن (۱ و ۳) که میشه ۲ حالت. چرا تو خونه اول و دومی ۳ نوشتیم؟ کل اعداد ما ۵ تا هستن (۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱)، یکیش تو خونه شرط میشینه (۱ یا ۳) میمونه ۴ تای دیگه، تو خونه اول صفر نمی‌تونه قرار بگیره پس میشه ۳ حالت؛ اما خونه دوم سه تا، یکی تو خونه شرط قرار گرفت یکی هم تو خونه اول پس ۳ تای دیگه موندن که میشه ۳ حالت

۹- با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چند عدد چهار رقمی زوج بدون تکرار می‌توان نوشت؟

حل: چون ما می‌خواهیم اعداد زوج بسازیم صفر می‌تونه تو خونه آخر (یکان) قرار بگیره ولی تو خونه اولی نمی‌تونه پس باید دو حالت مختلف بررسی کنیم

خونه شرط

(I) $\boxed{۱}\ \boxed{۳}\ \boxed{۴}\ \boxed{۵}$ = ۵×۴×۳×۱

صفر

خونه شرط

$+ \Rightarrow ۱۵۶$

(II) $\boxed{۲}\ \boxed{۳}\ \boxed{۴}\ \boxed{۴}$ = ۴×۴×۳×۲

(۴ و ۲)

I ← تو خونه شرط صفر قرار گرفت پس میشه ۱ حالت، حالا ۵ تای دیگه موندن (۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱) پس خونه اول ۵ حالت داره و ...

II ← یکیش (۴ و ۲) تو خونه شرط قرار بگیره میمونه ۵ حالت دیگه که تو خونه اول صفر نمی‌تونه قرار بگیره پس میشه ۴ حالت سه تا از اون طرف یکی تو خونه شرط یکی هم تو خونه اول پس واسه دومی میشه ۴ حالت

* احتمال

احتمال = اندازه‌گیری سهم

→ نظری = فقط یکبار

→ تجربی = چندین بار = تخمین شانس = تخمین احتمال

فراوانی نسبی

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{فضای تصادفی}}{\text{فضای نمونه}} = \frac{\text{حالات مطلوب}}{\text{کل حالات}} = \boxed{\frac{\text{مطلوب}}{\text{کل}}}$$

نکته: فضای نمونه‌ای

→ گسسته ← → هم شانس

→ غیر هم شانس

→ پیوسته

n ← تعداد پرتاب

در سکه دو حالت داریم ← (پشت - رو)

در تاس ۶ حالت داریم ← (۱-۲-۳-۴-۵-۶)

کل حالات = n(S)

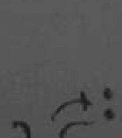
- سکه $= 2^n$
- تاس $= 6^n$
- انتخاب مهره از کیسه: $C(n,r) = \binom{n}{r}$

مثال: کیسه‌ای شامل ۵ مهره فضای نمونه (n(S)) را در حالات زیر حساب کنید.

الف) دو مهره همزمان خارج کنیم ب) دو مهره متوالی (پشت سرهم) بدون جایگذاری

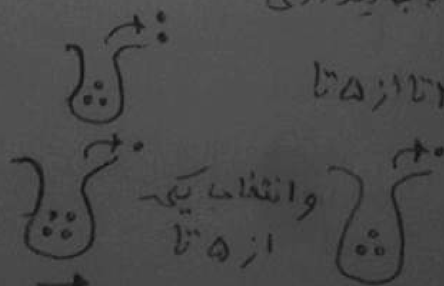
ج) دو مهره متوالی با جایگذاری

الف) انتخاب ۲ تا از ۵ تا



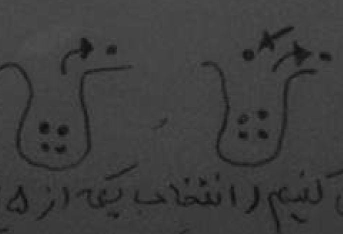
$$n(S) = \binom{5}{2} = \frac{4\times5}{1\times2} = 10$$

ب) انتخاب یکی از ۴ تا و انتخاب یکی از ۵ تا



$$n(S) = \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} = 20$$

ج)



$$n(S) = \binom{5}{1}\binom{5}{1} = 25$$

از ۵ مهره یکی را خارج می‌کنیم (انتخاب یکی از ۵ تا) بعد اونی که خارج کردیم را دوباره می‌اندازیم داخل کیسه بعد یه مهره دیگه خارج می‌کنیم (انتخاب یکی از ۵ تا)

۱- از کیسه ای شامل ۹ مهره متمایز یک مهره به تصادف اختیار می کنیم و بدون آنکه رؤیت شود کنار می گذاریم و سپس مهره دیگری به تصادف خارج می کنیم

$n(S)$ در حالت دوم چقدر است

شاید اینجوری فکر کنید که ما ۹ مهره داشتیم یکی را خارج کردیم پس ۸ مهره دیگه مونده و سپس از این ۸ تا یکی را خارج می کنیم $\Leftarrow n(S)=8$ ولی این درست نیست! چرا؟

نکته سؤال اینه بدون آنکه رؤیت شود. با وجود اینکه از این کیسه یک مهره خارج کردیم چون هنوز رؤیت نشده پس $n(S)$ ما ۸ نیست ۹ است چون شانس بقیه هنوز تغییر نکرده پس تو تست اگر دیدی نوشته بدون آنکه رؤیت شود یعنی شانس ها بهم نخورده $\Leftarrow$ $n(S)=9$

بدون آنکه رؤیت شود = یعنی دزد آمد چیزی نبرده

۲- از دو ظرف زیر ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم فضای نمونه آن کدام است؟

(۱) (۲)

* روش اول $\binom{5}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{2}\times\binom{4}{1}+\binom{4}{2}\times\binom{5}{1}=84$

ممکن است ۳ تا را از ظرف یک برداریم که میشه انتخاب ۳ تا از ۵ تا یا (۲) از ۴ تا.

ضمناً باید ... دو ... ...

ضمناً ممکن است ۲ تا را از ظرف یک که میشه انتخاب ۲ تا از ۵ تا و یکی را از ظرف ۲ که میشه انتخاب یکی از چهار تا یا برعکس این

* روش دوم فکر کنید دو تا ظرف یکی بشن! تعداد مهره ها چند میشه؟ ۹ تا قرار شده چند مهره را خارج کنیم؟ ۳ تا پس میشه انتخاب ۳ تا از ۹ تا

$\binom{9}{3}=\frac{7\times8\times9}{1\times2\times3}=84$

۳- ظرفی ۴ مهره زرد و ۹ مهره سفید دارد از این ظرف مهره ای $\left\{\begin{array}{l}\text{خارج می کنیم}\\ \text{به تصادف خارج می کنیم}\end{array}\right.$

$n(S)$ ما در دو حالت چقدر است؟

✓ خارج می کنیم میشه دو حالت! چرا؟ چون اینجا رنگ برای ما مهم است. پس مهره خارج شد یا زرد است یا سفید ⟸ ۲ حالت = { زرد ، سفید } = $n(S)$

✓ به تصادف خارج می کنیم وقتی کلمه به تصادف آمد دیگه رنگ برای ما مهم نیست تعداد برای ما مهم است که تعداد کل میشه ۱۳ (۴ زرد و ۹ سفید) پس میشه انتخاب یکی از ۱۳ تا ⟸ $n(S) = \binom{13}{1} = 13$ حالت

$\underset{\text{۶ حالت دارد}}{\boxed{}} \times \underset{\text{۶ حالت دارد}}{\boxed{}} = 36$

$6^n = 6^2 = 36$

۴- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم $n(S)$ آن چقدر است؟ ۵۲ — طبق اصل ضرب

(سوالاتی که ممکن است در پرتاب ۲ تاس بیاید)

۱- در پرتاب ۲ تاس چند حالت اعداد رو شده یکسان است؟ ۶

۲- ...... غیر یکسان ...؟ ۳۰

۱۵ تا آن تو مثلث ۱ و ۱۵ تا دیگه تو مثلث ۲

۳- در پرتاب ۲ تاس با کدام احتمال عدد اول از عدد دوم بزرگتر است (عدد رو شده)؟ و برعکس؟ و همچنین عدد اول برابر عدد دوم باشد؟

نمایش ۳۶ حالت — مثلث ۲

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

مثلث ۱

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{مطلوب}}{\text{کل}} \begin{cases} \text{عدد اول} > \text{عدد دوم} \to \frac{15}{36} \\ \text{عدد دوم} > \text{عدد اول} \to \frac{15}{36} \\ \text{عدد اول} = \text{عدد دوم} \to \frac{6}{36} \end{cases}$$

اگر نمایش حالات رو شده را به دو مثلث تقسیم کنیم. ۱۵ حالت آن در داخل مثلث اول است (که عدد رو شده اول بزرگتر عدد دوم است) و ۱۵ حالت آن در مثلث دوم (که عدد اول کوچکتر از عدد دوم است) و ۶ حالت آن در مرز مشترک دو مثلث (که عدد اول برابر عدد دوم است)

ممکن است از مجموع اعداد رو شده در پرتاب دو تاس سؤال بیاید:

۷. مجموع اعداد رو شده در پرتاب ۲ تاس از ۲ شروع میشه میره تا ۱۲، مجموع (۱و۱) میشه ۲ کمترین حالت و مجموع (۶و۶) میشه ۱۲ بیشترین حالت

* نکته

مجموع اعداد در پرتاب ۲ تاس ← ۲و۳و۴و۵و۶و۷و۸و۹و۱۰و۱۱و۱۲

حالت‌های ممکن ← ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

همه مراحل ۱ [redacted] از بالا یکی یکی کم کن (۱-۲)
این کار رو تا ۷ ادامه بده بعد برو از ۱۲
بیا تا طرف ۷ این دفعه از ۵ نیست تکیه
از بالا یکی کم کن مثل اعداد سمت چپ
را بنویس

۲ ← مجموع عدد ۲ از پرتاب ۲ تاس
۱ ← یعنی در ۱ حالت مجموع اعداد رو شده برابر ۲ است

یا

۳ ← مجموع عدد ۳ از پرتاب دو تاس
۲ ← یعنی در ۲ حالت مجموع اعداد رو شده برابر ۳ است. پس اینو دفعه طرح سؤال رید

سؤال

۱) در پرتاب دو تاس با هم با کدام احتمال مجموع اعداد رو شده برابر ۷ است؟

$$P = \frac{6}{36}$$

عدد زیر ۷ ← ۶ ، ۳۶ ← $n(s)$

۲) در پرتاب دو تاس با هم با کدام احتمال مجموع اعداد رو شده برابر ۱۰ است؟

$$P = \frac{3}{36}$$

۳) در پرتاب دو تاس با هم با کدام احتمال مجموع اعداد رو شده کمتر از ۵ است؟

۲و۳و۴و۵و۶و۷و۸و۹و۱۰و۱۱و۱۲

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

$$P = \frac{(1+2+3)}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

۴- در پرتاب دو تاس با هم با کدام احتمال مجموع اعداد رو شده زوج است؟

۲ ۴ ۶ ۸ ۱۰ ۱۲

۱ ۳ ۵ ۵ ۳ ۱

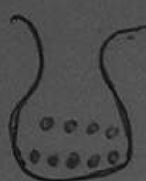
$1+3+5+5+3+1=18$

$$P = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

جواب $\frac{1}{2}$

* سوال های کیسه و مهره (تیپ سوالات)
- باهم و بدون جایگذاری
- بطور متوالی و بد ~
- بطور متوالی و با جایگذاری

A- از کیسه ای که درون آن ۴ مهره سبز و ۵ مهره صورتی وجود دارد به تصادف ۲ مهره باهم و بدون جایگذاری خارج می کنیم مطلوب است احتمال اینکه



۱- یکی صورتی و یکی سبز باشد

احتمال

$$P(A)=\frac{\text{مطلوب}}{\text{کل}}=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}=\frac{5\times 4}{36}=\frac{20}{36}$$

$$\binom{9}{2}=\frac{8\times 9}{1\times 2}=\frac{72}{2}=36$$

- تعداد کل مهره ها ۹ تا است ۲ تا را می خواهیم خارج کنیم پس $n(S)$ ما یا همان کل میشه انتخاب ۲ تا از ۹ تا $\binom{9}{2}$ که حاصل شد ۳۶

- اما حالت مطلوب ما دوتا مهره را می خواهیم خارج کنیم یکی صورتی باشد (یعنی انتخاب یکی از ۵ تا) و یکی هم سبز (یعنی انتخاب یکی از ۴ تا) که میشه

$$\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}$$

یک صورتی و یعنی یک سبز

۲- هر دوتا سبز باشند. حل ← انتخاب ۲ تا از ۴ تا

$$P(A)=\frac{\binom{4}{2}}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

۳- هر دو صورتی باشند. حل ← انتخاب ۲ تا از ۵ تا

$$P(A)=\frac{\binom{5}{2}}{36}=\frac{10}{36}$$

*۴- هر دو هم رنگ باشند. حل ←

$$P(A)=\frac{\binom{4}{2}+\binom{5}{2}}{36}=\frac{10+6}{36}=\frac{16}{36}$$

هر دو هم رنگ باشند یعنی هر دو صورتی باشند یا هر دو سبز باشند

انتخاب ۲ تا از ۵ تا — انتخاب ۲ تا از ۴ تا

۵- حداقل یکی سبز باشد. حل ... یعنی یا یک دونه سبز و یک دونه صورتی

یعنی داریم یا دوتا سبز

$$P(A)=\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}+\binom{4}{2}}{36}=\frac{26}{36}$$

۶- حداقل یکی صورتی باشد. حل   دوتا صورتی یا یک سبز و یک صورتی

$$P(A)=\frac{\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}+\binom{5}{2}}{36}=\frac{20+10}{36}=\frac{30}{36}$$

۷- حداکثر ۱ سبز باشد. حل   ۲تا سبز یا یکی صورتی و یکی سبز

$$P(A)=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}+\binom{5}{2}}{36}=\frac{20+10}{36}=\frac{30}{36}$$

B- همان سوال A ولی این دفعه مهره‌ها را بدون جایگذاری خارج می‌کنیم مطلوب است احتمال اینکه

یعنی پشت سرهم و بدون جایگذاری

۱- اولی سبز و دومی صورتی باشد. حل n(S) ما با سوال A فرق دارد.

- تعداد کل مهره‌ها ۹ تا، یکی را خارج می‌کنیم (میشه انتخاب یکی از ۹ تا) اینو می‌ذاریم کنار حالا ۸ تای دیگه مونده از این ۸ تا یکی دیگه را خارج می‌کنیم (انتخاب یکی از ۸ تا)

پس n(S) ما برابر است با $n(S)=\binom{9}{1}\times\binom{8}{1}=9\times 8=72$

چرا اینا با هم ضرب میشن ← یه مهره را خارج می‌کنیم می‌ذاریم کنار و بعد یکی دیگه خارج می‌کنیم

- اما حالت مطلوب گفته بود اولی سبز باشه دومی صورتی پس میشه انتخاب یکی از چهارتا و یکی از ۵ تا ⟸ احتمال اینکه اولی سبز و دومی صورتی باشه برابر است با $P=\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{72}=\frac{20}{72}$

۲- یک سبز و یکی صورتی باشد

$$P=\frac{\binom{4}{1}\times\binom{5}{1}\times \overset{\text{جایگشت}}{2!}}{72}=\frac{4\times 5\times 2}{72}$$

چون ما مهره‌ها را یکی یکی خارج می‌کنیم

یا اولی سبز باشه و دومی صورتی یا اولی صورتی دومی سبز پس ⟸ ۲

جایگشت دارد

۳- هردو سبز باشد ← اولی سبز و دومی سبز ← $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = 12 \Rightarrow P(A) = \frac{12}{72}$

۴- هردو صورتی باشد ← اولی صورتی و دومی صورتی ← $\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = 20 \Rightarrow P(A) = \frac{20}{72}$

تعداد مهره‌های صورتی ۵ تا هستش یکی را خارج می‌کنیم (میشه انتخاب یکی از ۵ تا) حالا چهار تای دیگه موند

از این ۴ تا یکی را خارج می‌کنیم (میشه انتخاب ۱ از چهار تا)

۵- هر دو هم رنگ باشد ← هردو سبز یا صورتی ← $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 20 + 12 = 32$

$P(A) = \frac{32}{72}$

۶- حداقل یکی سبز باشد ← با جایگشت

$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} + \binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1} \times 2! = 3\times4 + 5\times4\times2 = 12 + 40 = 52 \Rightarrow$

$P(A) = \frac{52}{72}$

۷) حداقل یکی صورتی باشد ←

$\binom{5}{1}\binom{4}{1}2! + \binom{5}{1}\binom{4}{1} = 60 \Rightarrow P(A) = \frac{60}{72}$

۸) حداکثر یکی سبز باشد ←

$\binom{4}{1}\binom{5}{1}2! + \binom{5}{1}\binom{4}{1} = 60$

$\Rightarrow P(A) = \frac{60}{72}$

۹- دومی مهره سبز باشد ← اولی سبز دومی سبز + اولی صورتی دومی سبز

$\binom{4}{1}\binom{3}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{1} = 12 + 20 = 32 \Rightarrow P(A) = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$

۱۰- دومی صورتی باشد ← جواب $\frac{5}{9}$

---

c- همان سؤال A این بار متوالی با جایگذاری مطلوب است؟

۱- اولی سبز دومی صورتی حل: $n(S)$ هر سؤال حتماً قبلاً با A متفاوت است

$n(S)$ ما چند؟ $\binom{9}{1}\binom{9}{1} = 81$ چرا؟ کل مهره ۹ تا بود یکی را خارج می‌کنیم (میشه انتخاب یکی از ۹ تا) دوباره اونو برمی‌گردونیم داخل کیسه

و تعداد مهره‌ها میشه همون ۹ تا دو بار یکی خارج می‌کنیم اگه میشه انتخاب یکی از ۹ تا)

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\ \frac{[۴][^{۵}_{۱}]}{۸۱}=\frac{۲۰}{۸۱}$$

۲- یکی سبز و یکی صورتی باشد

با جایگشت

$$n(A)=[^{۴}_{۱}][^{۵}_{۱}]2!=۴۰\Rightarrow P(A)=\frac{۴۰}{۸۱}$$

۳- هر دو سبز باشد.

$$n(A)=[۴][^{۴}_{۱}]=۱۶\quad\Rightarrow P(A)=\frac{۱۶}{۸۱}$$

۴- هر دو صورتی باشند.

$$n(A)=[^{۵}_{۱}][^{۵}_{۱}]=۲۵\Rightarrow P(A)=\frac{۲۵}{۸۱}$$

۵- هر دو هم رنگ باشند.

$$n(A)=\underbrace{۱۶}_{\text{هر دو سبز}}+\underbrace{۲۵}_{\text{هر دو صورتی}}\Rightarrow P(A)=\frac{۴۱}{۸۱}$$

۶- حداقل یکی سبز باشد

$$n(A)=(^{۴}_{۱})(^{۴}_{۱})+(^{۴}_{۱})(^{۵}_{۱})۲!=۱۶+۴۰\quad\Rightarrow P(A)=\frac{۴۰+۱۶}{۸۱}=\frac{۵۶}{۸۱}$$

۷- حداقل یکی صورتی باشد

$$n(A)=(^{۵}_{۱})(^{۵}_{۱})+(^{۴}_{۱})(^{۵}_{۱})۲!=۲۵+۴۰=۶۵$$

$$P(A)=\frac{۶۵}{۸۱}$$

۸- حداکثر یکی سبز باشد

$$n(A)=(^{۴}_{۱})(^{۵}_{۱})۲!+(^{۵}_{۱})(^{۵}_{۱})=۴۰+۲۵=۶۵$$

هیچ سبز

هیچ صورتی

اولی سبز باشد یا دومی چیزی نگفته پس جایگشت داره

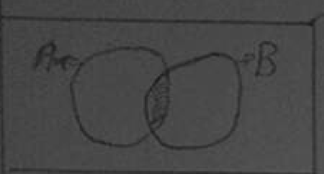
$$P(A)=\frac{۶۵}{۸۱}$$

۹- دومی سبز باشد. ج. $\frac{4}{9}$

۱۰- دومی صورتی باشد. ج. $\frac{۵}{۹}$

۱) اشتراک دو پیشامد

اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه S باشند آنگاه اشتراک آنها را با نماد $A\cap B$ نمایش می‌دهیم

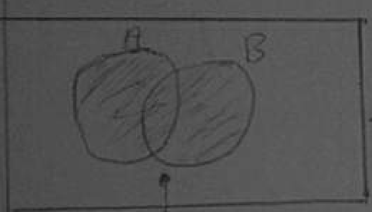


تعبیر $A\cap B$ ← هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ بده

اشتراک تو احتمال تعبیر و را دارد

۲- اجتماع دو پیشامد

اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه S باشند آنگاه اجتماع آنها را با نماد $A\cup B$ نمایش می‌دهیم.



تعبیر (معنا) $A\cup B$ ← پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو پیشامد

قسمت اشتراک دو بار آمده است یک بار باید کم بشه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

اگر طرفین را بر $n(S)$ تقسیم کنیم داریم:

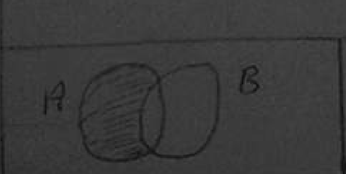
$$\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$* \quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

* اجتماع دو پیشامد کلمه یا را باید تو تست ببینیم

۳) تفاضل دو پیشامد

اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه S باشند آنگاه تفاضل B از A را با نماد A-B نمایش می‌دهیم



تعبیر A-B ← پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B) \xrightarrow{\text{if} \div n(S)} \begin{cases} P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \\ P(A-B)=P(A\cup B)-P(B) \end{cases} *$$

مثال) عددی را به تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰ انتخاب می‌کنیم مطلوب است احتمال اینکه این عدد بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد

نکته: به طور کلی تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی n که بر a بخش پذیرند برابر است با $\left[\frac{n}{a}\right]$

$\frac{300}{2}$ ، $\frac{300}{3}$ ، $\frac{300}{6}$

اعدادی که بر دو بخش پذیرند — اعدادی که هم بر دو و هم بر سه بخش پذیرند

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

اعدادی که بر سه بخش پذیرند

~~$P(A\cup B) = 2 + 3 - 6$~~

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\text{مطلوب}}{\text{کل}} = \frac{150}{300} + \frac{100}{300} - \frac{50}{300} = \frac{2}{3}$$

۴) دو تا قانون مهم (دمرگان)

1) $A - B = A\cap B$

2) $\begin{cases} (A\cap B)' = A'\cup B' \\ (A\cup B)' = A'\cap B' \end{cases}$

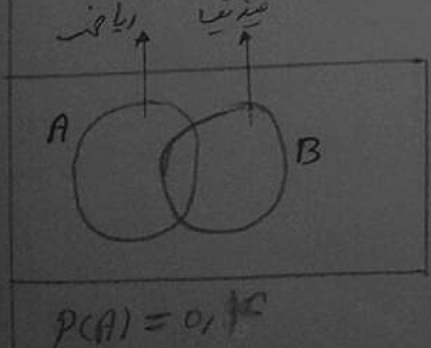
فارسی: $(A\cap B)' = A'\cup B'$

نقیض بی اجتماع نقیض آ — نقیض بی اشتراک آ

مثال های پیشامد و احتمال

۱- احتمال آنکه شخصی در ریاضی قبول شود ۰٫۴ و در فیزیک قبول شود ۰٫۵ و در ریاضی یا فیزیک قبول شود ۰٫۷ است مطلوب است احتمال اینکه این شخص

الف) هم در ریاضی و هم در فیزیک قبول شود



حل: تو قسمت الف از ما چی خواسته؟ اشتراک

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$P(A) = 0{,}4$

$P(B) = 0{,}5$

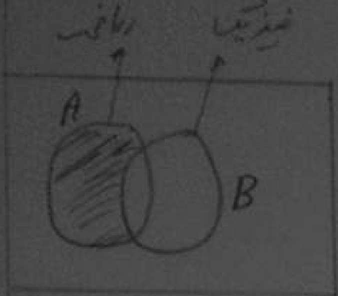
$P(A\cup B) = 0{,}7$

در ریاضی یا فیزیک

$$0{,}7 = 0{,}4 + 0{,}7 - P(A\cap B) \Rightarrow$$

$$\underbrace{P(A\cap B)}_{\text{ها}} = 0{,}2$$

یعنی فیزیک و ریاضی باهم اتفاق



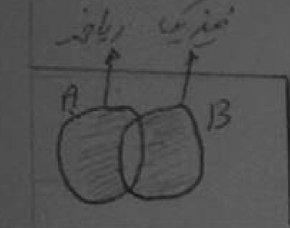
ب) در ریاضی قبول شود ولی در فیزیک قبول نشود.

حل ب: $P(A-B)$ را از فضا خود بیشتر ⟸

$$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) = 0/4 - 0/2 = 0/3$$

که تو قسمت الف بدست آمده $P(A\cap B)$

ج- در ریاضی قبول شود و در فیزیک قبول نشود یا در فیزیک قبول شود و در ریاضی قبول نشود حل: اینو می‌تونیم از تفاضل متقارن $(A\Delta B)$ حل کنیم



تذکر: تفاضل متقارن $(A\Delta B)$، $P(A\Delta B) = P(A\cup B) - P(A\cap B)$

or

$P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)$

$$P(A\Delta B) = 0/7 - 0/2 = 0/5 \quad \text{یا} \quad P(A\Delta B) = 0/4 + 0/5 - 0/4 = 0/5$$

د) نه در ریاضی قبول شود و نه در فیزیک قبول شود

حل: تعبیر این سوال می‌شه $P(A'\cap B')$ این ما را یاد قضیه دمورگان میاره!

و تو قضیه دمورگان یاد گرفتیم که $P(A'\cap B')$ برابر است با $P(A\cup B)'$ و همچنین

می‌دانیم که تو ریاضی $P(A\cup B)'$ برابر است با $1-P(A\cup B)$

$$P(A'\cap B') \xrightarrow{\text{دمورگان}} P(A\cup B)' = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0/7 = 0/3$$

که تو قسمت های قبل بدست آمده

ه) در ریاضی قبول نشود یا در فیزیک قبول نشود، حل: تعبیر که: $P(A'\cup B')$

$$P(A'\cup B') \xrightarrow{\text{دمورگان}} P(A\cap B)' = 1 - P(A\cap B) = 1 - 0/2 = 0/8$$

تست: حاصل $1-P(A')-P(A\cap B)$ کدام است؟

1) $P(A\cap B)$ 2) $P(A\cup B)$ 3) $P(A\cap B')$ 4) $P(A\cup B')$

حل: $* \; P(A)+P(A')=1 \to P(A)=1-P(A')$ ، $1-P(A')-P(A\cap B)$

$$P(A)-P(A\cap B)=P(A-B) \xleftrightarrow{\text{دمورگان}} P(A\cap B')$$

تست ۲: اگر $P(A')+P(B')=1/4$ حاصل $P(A'\cup B')-P(A\cup B)$ کدام است؟

1) $0/4$ 2) $-0/4$ 3) $0/6$ 4) $-0/6$

حل: $P(A')+P(B')=1/4 \to 1-P(A)+1-P(B)=1/4 \to$

$$P(A)+P(B)=2-1/4=0/6 \quad [I]$$

$$P(A'\cup B')-P(A\cup B)$$

دمورگان

$$P(A\cap B)'-P(A\cup B)$$

طبق قانون متمم

$$[1-P(A\cap B)]-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)] \Rightarrow$$

این منفی در عبارات بالا ضرب شده

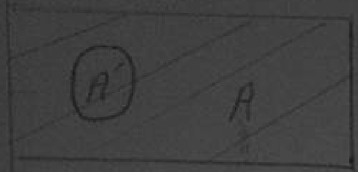
به همه اینها

$$1-P(A\cap B)-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-(\underbrace{P(A)+P(B)}_{0/6}) \Rightarrow$$

$$1-0/6=0/4$$

* احتمال متمم

$A \subseteq S$ مجموعه مادر



$A \cap A' = \phi$

$A \cup A' = S$

$\rightarrow n(A') = n(S) - n(A)$

پیشامد کل — پیشامد A — پیشامد اتفاق افتادن A

اگر بالایی در تقسیم بر $n(S)$ کنیم احتمال تولید میشه که برابر است با $P(A') = 1 - P(A)$

مثال: احتمال آن که در پرتاب ۳ سکه حداقل یک سکه رو بیاید چیست

حل: $\underset{\text{رو}}{۳} + \underset{\text{رو}}{۲} + \underset{\text{رو}}{۱}$ یعنی حداقل یکی رو بیاد

متمم یعنی برخلاف اونی که سوال گفته. تو سوال گفته حداقل یکی رو بیاد که متمم آن میشه اصلاً رو نیاد یعنی پشت بیاد $\Leftarrow$

متمم $\rightarrow P(A')$ = اصلاً رو نیاد = پشت بیاد

حالا باید احتمال پشت آمدن هر سه سکه را بدست آوردیم $(P(A'))$

$$P(A') = \frac{\text{مطلوب}}{\text{کل}} = \frac{\overset{\text{پشت آمدن}}{1}}{2^{\overset{\text{تعداد سکه ها}}{3}}} = \frac{1}{8}$$

با بدست آوردن احتمال متمم $(P(A'))$

حالا می توانیم احتمال سوال را بدست آوریم $\rightarrow$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

* احتمال شرطی

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\text{مطلوب}}{\text{کل*}}$$

به شرط

در احتمال شرطی داده های سوال تبدیل میشن به اطلاعات جدید یعنی حجم سوال کم میشه (کوچیک میشه)

مثال: در پرتاب یک تاس اگر بدانیم عدد رو شده زوج است با چه احتمالی اول است.

اگر سرنخ ما است پس تو تست ها هر وقت اگر دیدید یعنی احتمال شرطی

تو یک تاس ۶ حالت داریم

۱	۲	۳	۴	۵	۶

یعنی $n(S)$ ما برابر ۶ است ولی در احتمال شرطی

این $n(S)$ ما تبدیل میشه به $n^*(S)$ یعنی کوچیک میشه. تو سوال گفته اگر بدانیم عدد رو شده زوج است زوج ها در پرتاب تاس عبارتند: ۲ و ۴ و ۶ که سه حالت است پس ⟸ $n^*(S)$ ما برابر ۳ است و ادامه سوال ذکر شده با چه احتمالی اول است بین اعداد ۲ و ۴ و ۶ فقط ۲ اول است که یک حالت دارد ⟸ $P(A) = \frac{\text{مطلوب}}{\text{کل}} = \frac{1}{3}$

توضیح فرمول با توجه به این مثال ⇓

* یعنی هم زوج باشه هم اول

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3}$$

فقط عدد ۲ هم زوج است هم اول که میشه ۱ حالت

اول باشد — به شرط اینکه زوج باشد — زوج بودن — تعداد زوج ها

با این مثال یاد گرفتیم که احتمال شرطی همان احتمال قدیم است ولی با این تفاوت که $n(S)$ ما داره کوچیک میشه

مثال ۲: در پرتاب یک تاس اگر بدانیم عدد رو شده اول است، احتمال اینکه عدد فرد باشد چقدر است؟

اعداد اول

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

حل: $n(S)$ در حالت اول ۶ تا بوده اگر که آمد تبدیل شد به ۳ تا! چرا؟

چون ذکر کرده اگر بدانیم عدد رو شده اولند که اعداد اول تو این پرتاب تاس ۲ و ۳ و ۵ هستن که میشه ۳ حالت $\Leftarrow$ $n^*(S) = ۳$

در ادامه سوال گفته فرد باشد از این ۳ تا عدد اول ۳ و ۵ فرد هستن که میشه دو حالت $\Leftarrow$

$$\text{احتمال} = \frac{\text{مطلوب}}{\text{کل}^*} = \frac{۲ \to (3,5)}{۳ \to (2,3,5)}$$

مثال سوم: در پرتاب دو تاس اگر بدانیم عدد رو شده نا کمتر از ۳ است احتمال اینکه اول باشد چقدر است؟

یعنی خود ۳ را هم حساب کنید

حل: تعداد حالات یک تاس

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

نا کمتر از ۳ $\boxed{۳ \; ۴ \; ۵ \; ۶}$ اینا هستن $\Leftarrow$ $n^*(S) = ۴$

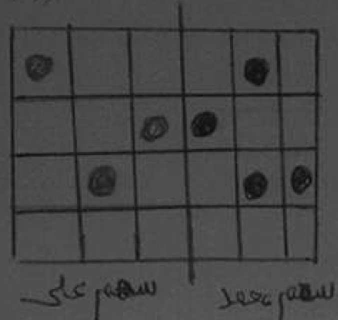
بعد گفته احتمال اینکه اول باشد تو این بشد چهار تایی فقط ۳ و ۵ اولند که میشه دو حالت $\Leftarrow$

$$\text{احتمال} = \frac{\text{مطلوب}}{\text{کل}} = \frac{۲}{۴ \to n^*(S)}$$

تو این ۳ تا مثال ما یاد گرفتیم که از لحاظ شهودی خیلی راحت تر می‌تونیم به جواب برسیم تا فرمول

قانون ضرب احتمال

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)$$



✓ مفهوم این قانون سه این زمین را در نظر بگیرید

کل زمین ۲۴ مربع است که سهم علی ۱۲ مربع است

که ۳ تای آن را با فرزندش به ارث داده و سهم محمد هم ۱۲ مربع است که ۴ تای آن را به فرزندش به ارث داده. احتمال دو سهم حالا ما می خواهیم بدونیم سهم فرزند علی از این زمین چقدر است. احتمال یا همان سهم دو مطلوب به کل و سهم فرزند محمد برابر است با:

سهم فرزند علی = $\frac{3}{24}$

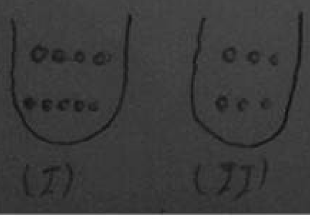
سهم فرزند محمد = $\frac{4}{24}$

اما مفهوم ضرب احتمال: سهم فرزند علی $\frac{1}{2}$ این زمین بود و سهم فرزند محمد هم $\frac{1}{2}$ دیگر! حالا علی از این $\frac{1}{2}$ زمین چقدر آن را به ارث برد. ۳ مربع از ۱۲ مربع و محمد ۴ مربع از ۱۲ مربع اگر اینها را در هم ضرب کنیم همان مقدار بالا بدست میاد که این میشه همون مفهوم ضرب احتمال

سهم فرزند علی $=\frac{1}{2}\times\frac{3}{12}=\frac{3}{24}$

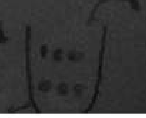
سهم فرزند محمد $=\frac{1}{2}\times\frac{4}{12}=\frac{4}{24}$

✓ با توجه به شکل مهره ای از ظرف (I) خارج نموده و در ظرف (II) قرار می دهیم سپس مهره ای از ظرف (II) با تصادف خارج می کنیم مطلوب است احتمال آنکه هر دو مهره خارج شده همرنگ باشند. حل



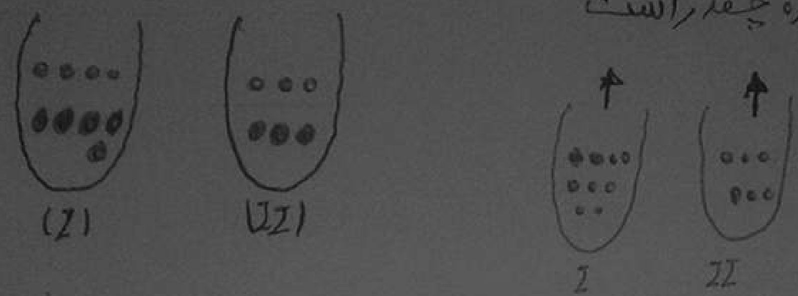
$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)=\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{7}$$

این مهره سبز را از ظرف 2 خارج می کنیم



۷- با توجه به شکل، مهره‌ای از ظرف (I) خارج نموده و مهره دیگری از ظرف II خارج می‌نماییم احتمال سبز بودن هر دو مهره چقدر است

حل



و سبز

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(\cancel{B|A})$ → احتمال B به شرط A ← اینجا شرطی وجود ندارد دو ظرف رابطه‌ای با هم ندارن (مثلاً چ مهره از ظرف یکی بره با ظرف دو و برعکس) پس این $P(B|A)$ برای ما مفهوم ندارد پس همان احتمال B ($P(B)$) را نشان میده

$P(B)$

سبز

$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

مفهوم مستقل بودن

(سبز بودن در کیسه دوم) ← ما زمانی از این فرمول $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ استفاده می‌کنیم که مثل A و B (که اینجا ظرف I و II است) کاملاً مستقل از هم باشند

← احتمال (سبز بودن در کیسه دوم) برابر است با ← $P(A \cap B) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{4}$

رخ دادن عدد زوج و عدد فرد در پرتاب اتاس. نمیشه که هم زوج باشد هم فرد میشه ناسازگار

سازگار - ناسازگار

که یعنی با هم نمی‌سازند اشتراکی ندارن ← $A \cap B = \phi$

با هم می‌سازند و اشتراکی دارن ← $A \cap B \neq \phi$

وضعیت دوتا پیشامد نسبت به هم

مستقل - وابسته

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ← اینو تو مثال قبلی گفتیم

اگر وقوع یا عدم وقوع پیشامد A هیچ تأثیری در احتمال وقوع پیشامد B نداشته باشد بهش میگن مستقل

* توزیع دوجمله‌ای احتمال

در این آزمایش ۲ نتیجه دارد، یکی پیروزی یا یکی شکست احتمال پیروزی P و احتمال شکست q نشان می دهیم

$$p+q=1$$

n = تعداد آزمایش

$$P(X=k)=\binom{n}{k}(p)^{k}(q)^{n-k}$$

k = تعداد احتمال پیروزی

$P(X=k)$ = احتمال پیروزی k

مثال ۱: سکه‌ای را ۶ بار پرتاب می کنیم، احتمال آنکه ۴ بار پشت بیاد چقدر است؟

حل:

$$P(\text{رو})=P(\text{پشت})=1/2$$

سکه را ۶ بار پرتاب می کنیم پس n ما برابر ۶ است، احتمال آن که ۴ بار پشت بیاد

پس پیروزی تو پشت بودن است ← تعداد حالات پیروزی برابر ۴ است

سوال احتمال پیروزی ۴ بار پشت را خواسته است

$$P(X=4)=\binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{6-4}=\binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=15\times\frac{1}{16}\times\frac{1}{4}$$

$$\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=\frac{5\times 6}{1\times 2}=15,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{1}{16},\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$$

مثال ۲: به دانش آموزی ۷ سوال ۴ گزینه‌ای داده‌ایم، اگر او سوال ها را به تصادف جواب دهد احتمال اینکه به ۵ سوال پاسخ صحیح دهد چیست

حل: تعداد کل سوال ها ۷ تا هستند $\Leftarrow n=7$ ، گفته احتمال اینکه به ۵ سوال پاسخ صحیح دهد پس پیروزی در پاسخ صحیح دادن است $\Leftarrow$ تعداد حالات پیروزی ۵ حالت است $(k=5)$.

سوالات به صورت ۴ گزینه‌ای هستند □□□□ از این ۴ تا گزینه یک گزینه جواب صحیح است و ۳ تا غلط پس $\Leftarrow$ $\frac{1}{4}=p$ پیروزی ، و شکست $q=\frac{3}{4}$

$$P(\underset{k}{x=5})=\binom{7}{\underset{k}{5}}\left(\underset{p}{\frac{1}{4}}\right)^{5}\left(\underset{q}{\frac{3}{4}}\right)^{2\to n-k}$$

مثال ۳: احتمال انتقال نوعی بیماری از فرد بیمار به افراد مستعد ۰٫۲ است اگر ۶ نفر مستعد با این بیمار ملاقات کنند با کدام احتمال ۴ نفر آن ها به این بیماری مبتلا می شوند

حل: $p=0.2 \quad q=0.8 \quad k=4 \quad n=6$

$$P(X=4)=\binom{6}{4}(0.2)^4(0.8)^2=$$

$$(0.2)^4=\left(\frac{2}{10}\right)^4=\frac{2^4}{10^4} \quad , \quad (0.8)^2=\left(\frac{8}{10}\right)^2=\frac{2^6}{10^2}$$

نکته: اگر ($p=q=\frac{1}{2}$) مثلاً داشتن تعداد فرزند ⇐ $P(X=k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

در تست‌ها که شانس پیروزی دقیقاً $\frac{1}{2}$ باشد از این فرمول استفاده می‌شود.

مثال ۱: در یک خانواده ۴ فرزندی با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است

$$P(X=2,3) = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} + \frac{\binom{4}{3}}{2^4} = \frac{6+4}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

مثال ۲: دانش‌آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد با کدام احتمال فقط به سه پرسش پاسخ صحیح داده است

$n=5 \quad k=3$

$$P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

گزینه‌ها ☑ ☐ ☐ ☐ ☐

$p=\frac{1}{5} \quad q=\frac{4}{5}$

۱- خانواده‌ای دارای سه فرزند دختر است. احتمال اینکه فرزند چهارم پسر باشد،

کدام است؟ (آموزش و پرورش) ۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل: تولد فرزند چهارم ارتباط و تأثیری از فرزندهای دیگر ندارد و مستقل است

فرزند چهارم یا پسر است یا دختر یعنی $p=q=\frac{1}{2}$ ⇐ احتمال فرزند چهارم $\frac{1}{2}$ است

۲- در یک خانواده ۵ فرزندی، با کدام احتمال، تعداد دخترها بیشتر از پسرها است؟

(دانشگاه آزاد تهران) (۱ $\frac{۱۵}{۳۲}$ (۲ $\frac{۵}{۱۶}$ (۳ $\frac{۳}{۸}$ (۴ $\frac{۱}{۲}$

حل: طبق تعداد فرزندان در تست‌هایی که شکست و پیروزی $\frac{۱}{۲}$ باشد از این فرمول استفاده می‌شود که n تعداد فرزندان

$$P(x=k) = \frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$$

تعداد دخترها نسبت به پسرها بیشتر باشد یعنی ← ۳ دختر ۲ پسر یا ۴ دختر ۱ پسر

n=۵ و k تعداد حالات پیروزی که در اینجا پیروزی در بیشتر بودن دخترها است

$\Leftarrow$ $x=۳$ و $k=۴$

$$P(x=۴ , ۳) = \frac{\binom{۵}{۴}}{۲^۵} + \frac{\binom{۵}{۳}}{۲^۵} = \frac{۵}{۳۲} + \frac{۱۰}{۳۲} = \frac{۱۵}{۳۲} \Rightarrow$$ گزینه ۱

سخن آخر

جهت به فرجام رسیدن این جزوه زمان زیادی تلف شده ؛اگر در موفقیت شما نقشی داشت ما را از دعای خیر خودتون محروم نکنید.

با آروزی موفقیت شما...